



UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y ASTRONOMÍA

SOLUCIONES ANALÍTICAS DE VIENTOS ESTELARES EN ESTRELLAS BA SUPERGIGANTES

POR

IGNACIO ARAYA GUZMÁN

Tesis presentada al Departamento de Física y Astronomía de la
Universidad de Valparaíso para optar al grado de Magíster en Astrofísica.

Director de Tesis: Michel Curé (*Universidad de Valparaíso*)

Evaluaadores: Lydia Cidale (*Universidad Nacional de La Plata*) y

Nelson Zamorano (*Universidad de Chile*)

Diciembre 2012
Valparaíso, Chile

©2012, Ignacio Araya Guzmán.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mis padres, José Araya y Nancy Guzmán, por ser un pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo mantenido a través del tiempo. A mis hermanas, Paulina y Francisca, por su constante cariño y preocupación. También a mis abuelos, tíos y primos por su apoyo.

A mi polola Nicole Robledo, por su amor y comprensión en los momentos difíciles de mi carrera. A su familia por todo el cariño hacia mi persona.

A los profesores durante mi vida universitaria, por su exigencia y dedicación, en especial a los profesores del Departamento de Física y Astronomía de la Universidad de Valparaíso. A mi director de tesis, el profesor Dr. Michel Curé, por su paciencia y motivación, él ha sido un pilar fundamental en mi vida profesional. También me gustaría agradecer al Dr. Alfredo Santillán por su apoyo.

A mis compañeros de magíster, por su amistad y por apoyarnos mutuamente en nuestra formación profesional. A mis amigos, no puedo nombrar a cada uno de ellos, pero ellos saben quienes son.

Por último agradezco el financiamiento dado por el Centro de Astrofísica de Valparaíso (CAV) y el Fondo GEMINI-CONICYT *N*° 32100020/2011 y *N*° 32110004/2012.

A todos ustedes muchas gracias.

Índice

Resumen	vii
1. Introducción	1
1.1. Estrellas masivas	1
1.1.1. Estrellas BA supergigantes	2
1.2. Vientos estelares	2
1.2.1. Vientos estelares impulsados por radiación	4
1.2.2. Comparación con el viento solar	5
1.2.3. Breve visión histórica de los vientos impulsados por radiación	6
1.2.4. Relación momentum-luminosidad del viento	9
1.3. Motivación	11
2. Teoría de los Vientos Estelares en Estrellas Masivas	12
2.1. Aceleración del viento debido a la radiación	12
2.1.1. Absorción de fotones de una atmósfera en expansión	12
2.1.2. Aceleración radiativa debido a las líneas espectrales	16
2.1.3. Aceleración radiativa debido a un ensamble de líneas	22
2.2. Modelo estándar CAK	23
2.2.1. Parametrización de la aceleración radiativa	24
2.2.2. Vientos impulsados por las líneas en el límite de una fuente puntual	25
2.2.3. El factor de corrección de disco finito	28
2.3. Tipos de soluciones	32
2.3.1. Solución rápida	33
2.3.2. Solución lenta Ω	34
2.3.3. Solución lenta δ	34

3. Soluciones Analíticas: Soluciones Rápidas	36
3.1. Villata (1992)	36
3.1.1. Aproximación de la aceleración de la línea	37
3.1.2. Ecuación de movimiento adimensional	43
3.1.3. Puntos críticos	44
3.1.4. Resolviendo la ecuación de movimiento	45
3.1.5. Solución de la ecuación de movimiento	46
3.2. Müller & Vink (2008)	50
3.2.1. El término de la aceleración de las líneas	50
3.2.2. Solución de la ecuación de movimiento	52
3.3. Comparación entre soluciones analíticas	57
4. Soluciones Analíticas: Soluciones Lentas δ	58
4.1. Soluciones analíticas rápidas versus lentas δ	58
4.1.1. g_L de Villata en soluciones lentas δ	58
4.1.2. g_L de MV en soluciones lentas δ	59
4.2. MV modificado para soluciones lentas δ	61
5. Malla Computacional	66
5.1. Distribución de parámetros	68
5.2. Función ajuste	71
5.3. Pérdida de masa y velocidad terminal	79
5.4. Otros Resultados	85
5.4.1. Relación momentum-luminosidad del viento	85
5.4.2. Velocidad terminal	88
6. Conclusiones	91
A. Aproximación de Sobolev	94
B. Función W de Lambert	99
C. Distribución entre parámetros	101
D. Funciones f_1, f_2 y f_3	105

Índice de figuras

1.1. Evolución de las estrellas masivas en el diagrama HR	3
1.2. Perfil P-Cygni	8
1.3. WLR para estrellas O, B y A Supergigantes.	10
2.1. Región de interacción de la línea	14
2.2. Absorción de la línea y profundidad óptica	16
2.3. Definiciones de $\phi(\Delta\nu)$ y $\Phi(\Delta\nu)$	19
2.4. Multiplicador de fuerza	26
2.5. Disco finito	29
2.6. Factor de corrección de disco finito	31
2.7. Perfil β	33
2.8. Perfil de velocidades de una solución numérica $L\delta$	35
3.1. Comportamiento de la función $Z(u)$	41
3.2. Función $f_N(u)$	42
3.3. Perfil de velocidad para εOri (Villata)	47
3.4. Diferencia en velocidades para εOri (Villata)	48
3.5. Error porcentual para εOri (Villata)	48
3.6. Perfil de velocidad para una estrella tipo O (Villata)	49
3.7. Diferencia en velocidades para una estrella tipo O (Villata)	49
3.8. Error porcentual para una estrella tipo O (Villata)	50
3.9. Ajuste de \hat{g}_L	52
3.10. Perfil de velocidad para εOri (MV)	54
3.11. Diferencia en velocidades para εOri (MV)	54
3.12. Error porcentual para εOri (MV)	55
3.13. Perfil de velocidad para una estrella tipo O (MV)	55
3.14. Diferencia en velocidades para una estrella tipo O (MV)	56

3.15. Error porcentual para una estrella tipo O (MV)	56
4.1. Perfil de velocidad para W03	59
4.2. Diferencia en velocidades para W03	60
4.3. Error porcentual para W03	60
4.4. Ajuste de \hat{g}_L para W03	61
4.5. Perfil de velocidad para W03 usando MV modificado	63
4.6. Diferencia en velocidades para W03 usando MV modificado	64
4.7. Error porcentual para W03 usando MV modificado	64
5.1. Malla computacional para estrellas BA supergigantes en el diagrama HR	67
5.2. Distribución de g_0 en función de la T_{eff} para diferentes masas estelares.	69
5.3. Distribución de δ_1 en función de la T_{eff} para diferentes valores de δ .	69
5.4. Distribución de δ_2 en función de la T_{eff} para diferentes masas estelares.	70
5.5. Distribución de γ en función de la T_{eff} para diferentes masas estelares.	70
5.6. \hat{g}_L utilizando las funciones g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para $T_{eff} < 13000 K$	75
5.7. \hat{g}_L utilizando las funciones g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para $T_{eff} > 13000 K$	75
5.8. Perfil de velocidades utilizando las funciones g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para $T_{eff} <$ $13000 K$	76
5.9. Perfil de velocidades utilizando las funciones g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para $T_{eff} >$ $13000 K$	76
5.10. Diferencia en velocidades para $T_{eff} < 13000 K$	77
5.11. Diferencia en velocidades para $T_{eff} > 13000 K$	77
5.12. Error porcentual para $T_{eff} < 13000 K$	78
5.13. Error porcentual para $T_{eff} > 13000 K$	78
5.14. Ubicación del punto singular	82
5.15. Error porcentual de la \dot{M} para $T_{eff} < 13000 K$	83
5.16. Error porcentual de la \dot{M} para $T_{eff} > 13000 K$	84
5.17. Error porcentual de la v_∞ para $T_{eff} < 13000 K$	84
5.18. Error porcentual de la v_∞ para $T_{eff} > 13000 K$	85
5.19. Discrepancia en la WLR	86
5.20. WLR obtenida de la malla computacional	86
5.21. WLR obtenida de la malla computacional para estrellas entre $11000 K <$ $T_{eff} < 20000 K$	87

5.22. Relación entre v_∞/v_{esc} y T_{eff}	88
5.23. Relación entre v_∞/v_{esc} en función de la T_{eff} para soluciones $L\delta$. . .	89
5.24. Relación entre v_∞/v_{esc} en función de la v_{esc} para soluciones $L\delta$	89
5.25. Relación entre v_∞/v_{esc} y v_{esc}	90
B.1. Ramas reales de la función W de Lambert	100
C.1. Distribución entre g_0 y $\log g$ para diferentes masas estelares.	101
C.2. Distribución entre δ_1 y $\log g$ para diferentes valores de δ	102
C.3. Distribución entre δ_2 y $\log g$ para diferentes masas estelares.	102
C.4. Distribución entre γ y $\log g$ para diferentes masas estelares.	103
C.5. Distribución entre g_0 y v_∞ para diferentes masas estelares.	103
C.6. Distribución entre δ_1 y v_∞ para diferentes valores de δ	104
C.7. Distribución entre δ_2 y v_∞ para diferentes masas estelares.	104

Resumen

Las soluciones numéricas, obtenidas de la hidrodinámica de los vientos estelares impulsados por radiación, se comparan con las soluciones analíticas obtenidas por Villata (1992) y Müller & Vink (2008). Basados en la comparación se determina que el término de la aceleración de las líneas encontrado por Müller & Vink es una generalización de lo obtenido por Villata.

Bajo la base de la existencia de las soluciones encontradas por Curé et al. (2011, *solución lenta δ*), para estrellas BA supergigantes, se busca obtener estas soluciones utilizando las metodologías de las soluciones analíticas, pero los resultados se alejan demasiado de la solución numérica. Estas metodologías se ajustan sólo para las soluciones rápidas (utilizando un perfil β). Modificando el término g_L de Müller & Vink se logra obtener una solución analítica para estrellas BA supergigantes con solución lenta δ , la cual depende de los parámetros del ajuste (g_0 , δ_1 , δ_2 y γ). A partir de esto, se crea una malla computacional con 200 modelos para estrellas BA supergigantes, de la cual sólo se encuentran 84 modelos con solución numérica lenta δ . Utilizando estos resultados, se obtiene la solución analítica lenta δ . Se logra obtener una relación entre los parámetros del ajuste y los parámetros estelares y del viento, con lo cual se hace que los parámetros del ajuste dependan de los parámetros estelares y del viento. Con esto, se obtiene una solución analítica para estrellas BA supergigantes independiente de la hidrodinámica. Además, utilizando los datos de la malla computacional se calcula la relación momentum-luminosidad y v_∞/v_{esc} , las cuales nos confirman que las estrellas BA supergigantes se modelan utilizando soluciones lenta δ .

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estrellas masivas

En el extremo superior del diagrama de Hertzsprung-Russel (HR), hay muchos objetos interesantes mostrando un amplio rango de características. Éstos representan objetos estelares muy calientes y luminosos, todos ellos descendientes de estrellas masivas. Son poco frecuentes, pero su importancia sobrepasa por lejos su pequeña cantidad, debido a la energía (radiativa y cinética) y los elementos químicos que inyectan al medio interestelar. El corto tiempo de vida ($\sim 1/1000$ del Sol) indica que muchas generaciones de estrellas masivas han pasado desde la formación de la galaxia, lo que incrementa su contribución al medio interestelar. Esto hace que las estrellas masivas jueguen un papel importante en la dinámica del medio interestelar. Sus intensos campos de radiación, poderosos vientos estelares y explosiones de supernova son las principales fuerzas impulsoras sobre el gas y polvo del medio interestelar. La mayor parte del movimiento de este material puede desencadenar la formación de estrellas causando un aumento en la densidad, o puede retardar la formación estelar barriendo el material de la galaxia debido a sus fuertes vientos. El material procesado y retornado por las estrellas masivas y el medio interestelar está típicamente enriquecido con helio, oxígeno y otros elementos más pesados. Este enriquecimiento afecta dramáticamente la evolución estelar de las nuevas estrellas, la cual depende críticamente de la metalicidad inicial del gas. Las estrellas masivas también son buenos trazadores de poblaciones jóvenes en galaxias cercanas, lo que nos ayuda a identificar la formación estelar en galaxias más distantes, por lo que

el entendimiento del pasado y evolución de las galaxias requiere de un completo entendimiento de las estrellas masivas.

1.1.1. Estrellas BA supergigantes

Las estrellas masivas de alrededor $8-40 M_{\odot}$ (masas solares) cruzan por un estado de estrellas BA supergigantes en el diagrama HR durante su evolución posterior a la secuencia principal (Figura 1.1). Ellas son caracterizadas por atmósferas extendidas, radios estelares de varias decenas hasta unos pocos cientos de R_{\odot} (radios solares) y una inmensa luminosidad, del orden de 10^4 hasta $10^5 L_{\odot}$ (luminosidades solares). Las estrellas BA supergigantes están entre las estrellas visuales más brillantes, alcanzando magnitudes absolutas mayores que $M_V \approx -9,5$. Por lo tanto, ellas muestran un gran potencial como indicadores para estudios estelares y galácticos sobre grandes distancias. Usando telescopios de $8 m$ estos objetos son accesibles a espectroscopía de alta resolución en galaxias del Grupo Local y espectroscopía de media resolución para distancias de varios Mpc (Firnstein & Przybilla 2012).

Esto permite restricciones observacionales en la evolución estelar de una variedad de ambientes galácticos, en particular, sobre los efectos de metalicidad, rotación, pérdida de masa estelar y eficiencia de la mezcla química. Importantes contribuciones pueden ser hechas en el estudio de la evolución química de las galaxias. Además las estrellas BA supergigantes pueden actuar como candelas estelares para la determinación de distancias usando la relación momentum-luminosidad del viento (Kudritzki et al. 1995; Puls et al. 1996; Kudritzki et al. 1999). Esta relación se deriva de la teoría de vientos impulsados por radiación y se basa principalmente en el ajuste de las líneas de Balmer (Kudritzki & Puls 2000).

1.2. Vientos estelares

El viento estelar es un continuo flujo de materia proveniente de una estrella. Entre las estrellas más masivas los vientos pueden ser muy poderosos, con importantes consecuencias para la propia evolución de la estrella, así como también para el medio interestelar de sus alrededores. Se sabe que los vientos de estrellas masivas son impulsados por la presión de la radiación emitida por la estrella.

Nuestro Sol tiene un *viento solar*, pero éste es tan tenue y transparente que sería

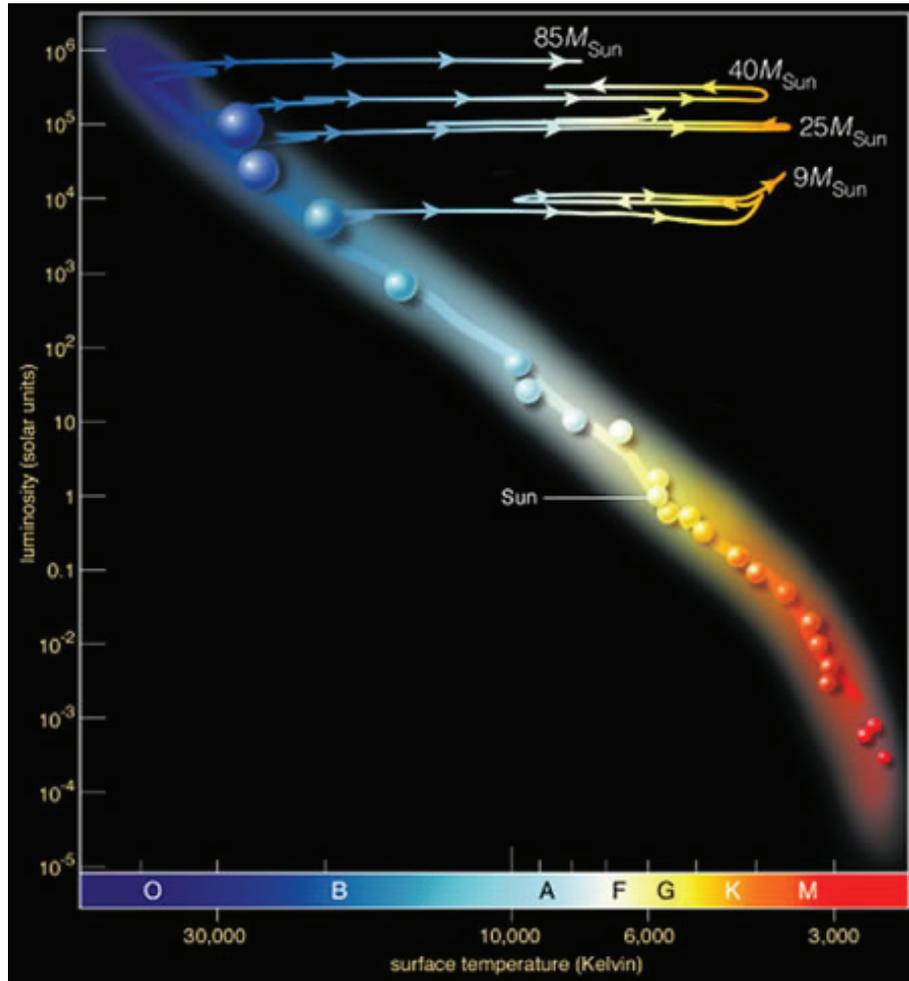


Figura 1.1: Evolución de las estrellas masivas desde la secuencia principal al estado de supergigantes en el diagrama HR.

difícil de detectar directamente si proviniera de una estrella más distante. Sin embargo, muchas estrellas tienen vientos que son suficientemente densos para ser opacos a ciertas longitudes de onda de la radiación de la estrella, y esto hace posible estudiarlos remotamente a través de la cuidadosa interpretación del espectro estelar observado. Los vientos de las estrellas masivas con temperaturas efectivas (T_{eff}) sobre los 7500 K, forman una clase bien definida, distinta de los vientos de estrellas más frías, y caracterizado por el rol central de la radiación de la propia estrella en impulsar un flujo de masa (Ud-Doula 2003). Las altas temperaturas de tales estrellas se traduce en un alto brillo superficial. Como los fotones poseen momentum, además de energía, el alto brillo superficial imparte este momentum a los átomos que dispersan

los fotones en la atmósfera de la estrella. Esta fuerza excede la fuerza debido a la gravedad estelar y el material es acelerado, comenzando el viento estelar.

Los dos parámetros más importantes (en lo que respecta a los vientos estelares), son la tasa de pérdida de masa \dot{M} , la cual es la cantidad de masa perdida de una estrella por unidad de tiempo, y la velocidad terminal v_∞ , que es la velocidad del viento estelar a una gran distancia de la estrella.

Los valores de \dot{M} y v_∞ son importantes porque (Lamers & Cassinelli 1999):

- \dot{M} describe la cantidad de material que pierde la estrella por unidad de tiempo. Conocer esta cantidad es importante para estudiar la evolución de las estrellas, porque una estrella con gran pérdida de masa evolucionará de manera diferente a que si tuviera una baja pérdida de masa.
- Diferentes teorías de vientos estelares predicen diferentes tasas de pérdidas de masa y velocidades terminales para una estrella, entonces comparando los valores observados con los valores predichos, es posible aprender cual es el mecanismo responsable de la pérdida de masa de una estrella.
- El gas que escapa de una estrella al medio interestelar, lleva energía cinética al medio interestelar. La cantidad de energía cinética que el viento estelar deposita en el medio interestelar por unidad de tiempo es $1/2 \dot{M} v_\infty^2$. Para estudiar los efectos del viento estelar sobre el material interestelar a través de la evolución de las estrellas, los valores de \dot{M} y v_∞ deben ser conocidos.

La pérdida de masa es un proceso clave en la evolución de estrellas calientes, y debe ser entendido cuatintativamente si esto es satisfactoriamente incluido en las amplias aplicaciones de la astrofísica, tales como la evolución galáctica.

1.2.1. Vientos estelares impulsados por radiación

Los vientos de estrellas masivas son impulsados por la absorción de líneas espectrales, por esto los vientos son denominados *vientos impulsados por la líneas* (line driven winds). Las estrellas masivas emiten el máximo de su radiación en el ultravioleta, donde las capas más exteriores de la atmósfera de estas estrellas tienen muchas líneas de absorción. La opacidad en las líneas de absorción es mucho más grande que

el continuo. La opacidad de una determinada línea, por ejemplo, la línea de resonancia de C IV en 1550\AA , puede ser hasta un factor de 10^6 veces más grande que la opacidad debido a la dispersión del electrón.

La gran fuerza de la radiación sobre los iones, debido a sus líneas espectrales, no sería eficiente en el impulso de los vientos estelares si esto no fuera por el efecto Doppler. Este efecto es el que mantiene acelerando continuamente a los vientos. Sin el corrimiento Doppler, los iones ligeramente acelerados no podrían seguir siendo acelerados, porque todo el flujo de una absorción eficiente a la longitud de onda λ_0 , específica del ion, debería ya haber sido absorbida en capas inferiores, sin embargo, durante su aceleración, los iones, que se mueven con velocidad v , absorben fotones a longitudes de onda $\lambda_0 + (v/c)$, con una diferente v a diferentes distancias de la estrella. Esto permite a los iones el uso de fotones en un cierto rango de longitudes de onda, haciendo la absorción de las líneas un proceso continuo y eficiente para la aceleración del viento estelar.

La aceleración radiativa es causada por el impulso de las líneas espectrales de los vientos de diferentes tipos de estrellas: estrellas de la secuencia principal, estrellas centrales de una nebulosa planetaria, gigantes y supergigantes de tipos O, B y A.

1.2.2. Comparación con el viento solar

El concepto general de que las estrellas pueden perder o eyectar materia es pensado como sucesos catastróficos y espectaculares, tales como las explosiones de supernova. Sin embargo, la idea específica de una fase estacionaria de flujo de viento estelar, nace en gran medida con el descubrimiento entre 1950 y 1960 del *viento solar*. El Sol es una estrella relativamente fría (comparada con una estrella masiva), de baja masa, con una temperatura superficial cercana a los 6000 K, pero curiosamente su viento surge de la presión y expansión de su corona que esta a una temperatura muy alta (alrededor de 1-2 millones de K, la cual es calentada por energía mecánica generada por convección en las capas interiores del Sol). Por el contrario, las estrellas masivas con una temperatura superficial más alta (sobre 7500 K) no tienen una zona de convección en las capas exteriores para calentar una corona. Por ende, sus vientos estelares se mantienen a temperaturas cercanas a la temperatura de la superficie, no teniendo una alta presión del gas para impulsar la expansión en contra

la gravedad estelar. Sin embargo, las estrellas masivas poseen un gran flujo radiativo, y es esta presión de radiación (no del gas) la que impulsa el viento.

Las velocidades típicas de los vientos estelares son normalmente cercanas a los 3000 km s^{-1} (estrellas tipo O), en comparación con los $400 - 700 \text{ km s}^{-1}$ del viento solar. La pérdida de masa de estas estrellas exceden enormemente (cerca de un factor de 10^9) a la del Sol. Actualmente, la tasa de pérdida de masa del Sol es de $10^{-14} M_{\odot}/\text{año}$, osea su masa se reducirá sólo un 0,01 % durante su vida útil de 10^{10} años . Por el contrario, durante la corta vida, cerca de 10^6 año , de un estrella masiva (tipo O), la tasa a la que pierde masa puede ser hasta $10^{-6} M_{\odot}/\text{años}$ y puede reducir sustancialmente, hasta un 90 % la masa original de la estrella. Algunas estrellas masivas terminan como *Wolf Rayet*, las cuales a menudo parecen haber perdido completamente su envoltura original de hidrógeno, dejando expuestos a la superficie elementos como carbono, nitrógeno y oxígeno, los que fueron sintetizados por procesos nucleares en su núcleo (Ud-Doula 2003).

1.2.3. Breve visión histórica de los vientos impulsados por radiación

Debido a que todo el conocimiento que tenemos acerca de las estrellas es basado en la luz que nos llega de éstas, no es una tarea simple detectar el viento estelar directamente. Una de las primeras evidencias indirectas de la pérdida de masa de las estrellas, viene de las observaciones de objetos llamados *estrellas nuevas* o *novas*, estas poseen erupciones fugaces de brillo que son visibles incluso a ojo descubierto. Las observaciones de Tycho Brahe, tales como la de 1572, fue de hecho lo que ahora llamamos una supernova. Otro descubrimiento fue en 1600 por Blaeu que más tarde fue llamado P-Cygni. En esa época no estaban claras las razones que estaban detrás de sus aparentes variaciones en brillo.

Una de las primera claves vinieron con la aplicación de la espectroscopía de la luz proveniente de las estrellas distantes a finales del siglo XIX. Las observaciones mostraron que las líneas espectrales provenientes de muchos objetos estelares tienen prominentes perfiles de líneas similares a los observados en el espectro de P-Cygni. Estos perfiles P-Cygni fueron caracterizados por tener peaks de corrimiento al rojo acompañados de absorciones con corrimiento al azul. El mejoramiento tecnológico en técnicas de espectroscopía ha permitido a los científicos determinar el espectro de

una nova. Se estableció que el ensanchamiento de las líneas era el resultado del efecto Doppler, pero aún no estaba claro el mecanismo que producía estos ensanchamientos.

Se pudo argumentar que un posible mecanismo para la formación de los perfiles de líneas es la expansión esférica de la atmósfera estelar (Figura 1.2). La mayoría de los perfiles P-Cygni muestran líneas en el ultravioleta de estrellas masivas, formadas por la dispersión de los fotones. Cuando un electrón hace una transición entre su estado base y el primer estado excitado, éste absorbe un fotón, pero el electrón rápidamente vuelve a su estado base, dando como resultado que el fotón original sea dispersado en una dirección diferente a la que llevaba inicialmente. Desde el punto de vista de un observador, el fotón original es removido de la línea de visión para ser absorbido. El hecho de que estas líneas tienen corrimiento hacia el azul indica que los absorbedores se están moviendo hacia el observador. Si asumimos que este proceso es simétricamente esférico, los fotones dispersados en una dirección distinta de la línea de visión del observador, se traducen en un perfil de emisión. En el caso ideal donde los fotones que han sido absorbidos son dispersados en la misma dirección que la línea de visión, el perfil de emisión es simétrico con respecto al centro de la línea, pero debido a que la estrella oculta parte de la atmósfera que se mueve lejos del observador, el perfil de emisión en el lado rojo es ligeramente más débil que en el lado azul. La suma del perfil de absorción y emisión forman la característica línea P-Cygni.

Además de las novae y estrellas que presentaban un espectro con presencia de P-Cygni, Wolf y Rayet (1867) descubrieron otra clase de estrella (llamada ahora Wolf-Rayet, WR) la cual poseía un espectro similar pero que en este caso la estrella no poseía ningún tipo de erupción. Basado en el hecho que el ancho de las líneas para las WR son muy amplios, Beals (1929) propuso un modelo donde las estrellas expulsan continuamente material en dirección radial con altas velocidades. En otras palabras, la estrella está rodeada de una envoltura, expandiéndose rápidamente, cuya extensión espacial es grande en comparación con el tamaño de la estrella. Ahora se sabe que esto es una razonable descripción de las estrellas WR.

Lentamente, se fue haciendo evidente que la mayoría de las estrellas tiene algún tipo de mecanismo que expulsa material. En el caso del Sol, Parker (1958) mostró que dada la gran temperatura de la corona solar ($10^6 K$), no es posible tener una corona estática. Entonces la existencia de una corona con alta temperatura la conduce natu-

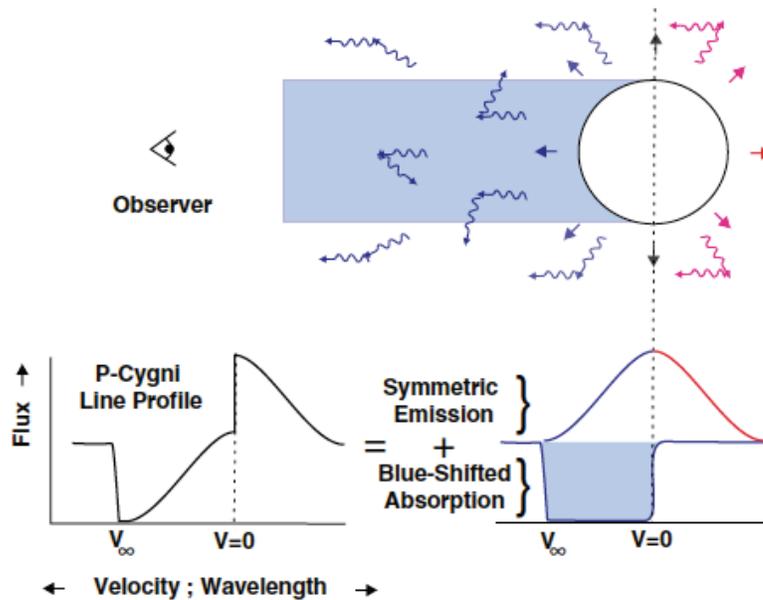


Figura 1.2: Ilustración esquemática de la formación de un perfil P-Cygni de un viento estelar en expansión. Imagen extraída de Murdin (2001)

ralmente a su expansión a través del gradiente de presión del gas. Estas predicciones fueron verificadas *in situ* por las observaciones desarrolladas por sonda *Mariner 2* en 1962 (Neugebauer & Snyder 1962).

En el caso de las WR y otras estrellas masivas que son muy luminosas, fue de alguna manera diferente al caso de Sol. Si los vientos de las estrellas masivas fueran impulsados por el gradiente de presión del gas, esto requeriría una temperatura de la corona estelar extraordinariamente alta para las cuales, no hay evidencia observacional. Sin embargo, Milne (1924) encontró que los fotones pueden impartir momentum al viento. En el contexto solar, Milne mostró que la absorción de flujo radiativo puede quizás mantener una atmósfera ligada gravitacionalmente. Este fue uno de los primero intentos de proveer una estructura para los vientos impulsados por radiación.

A pesar de la falta de una elaborada teoría que acelere los vientos de estrellas masivas, una convincente evidencia vino con el descubrimiento de los perfiles P-Cygni en las líneas de resonancia en el ultravioleta del NV, CIV y SiIV en el espectro de supergigantes O y B (Morton 1967). Estaba claro que los perfiles P-Cygni podían ser formados sólo por una envoltura en expansión, con una velocidad que puede ser

directamente determinada por el ancho de las líneas. Una versión más completa de la teoría de los vientos impulsados por radiación fue desarrollada por Lucy & Solomon (1970), y luego extendida por (Castor, Abbott, & Klein 1975, CAK). En particular, CAK demostraron que en una atmósfera en expansión un gran ensamble de líneas puede aumentar la fuerza de las líneas, que es función del gradiente de la velocidad. Se han hecho más modificaciones a la teoría CAK desde ese entonces, por ejemplo, Pauldrach, Puls, & Kudritzki (1986, PPK) y (Friend & Abbott 1986, FA). En los primeros trabajos de CAK se consideró a la estrella como una fuente puntual. Resulta que si la estrella posee un tamaño finito hace una diferencia en el impulso del viento, este efecto puede ser incluido a través del llamado *factor de corrección de disco finito*. En la última década, Curé (2004) y Curé et al. (2011) encontraron dos soluciones físicas provenientes de las ecuaciones unidimensionales del modelo m-CAK, la cuales describen los perfiles de velocidades para estrellas con alta rotación (solución lenta Ω) y para estrellas BA supergigantes (solución lenta δ).

1.2.4. Relación momentum-luminosidad del viento

Como los vientos estelares de estrellas masivas son impulsados por radiación, es razonable esperar que el momentum mecánico del material fluyendo esté relacionado con el momentum del fotón. La teoría de los vientos impulsados por radiación predice que el momentum del viento D_{mom} depende de la luminosidad estelar (L/L_{\odot}) como:

$$D_{mom} \equiv \dot{M}v_{\infty}(R_{*}/R_{\odot})^{1/2} \propto (L_{*}/L_{\odot})^x \quad (1.1)$$

donde el inverso de x es,

$$1/x = \alpha_{eff} = \alpha - \delta \quad (1.2)$$

La ecuación 1.1 es conocida como la *Relación Momentum-Luminosidad del Viento* (*WLR en inglés*) (Kudritzki et al. 1995; Puls et al. 1996). Esta relación provee una nueva forma para obtener las luminosidades de las observaciones espectroscópicas. Determinando las velocidades terminales de la parte azul de la absorción en los perfiles P-Cygni, la pérdida de masa con los perfiles $H\alpha$, junto con las estimaciones espectroscópicas de radio, proveen una manera independiente de determinar la luminosidad de estos objetos (Figura 1.3). Las potencialidades de la WLR para la

determinación de distancias extragalácticas son consideradas muy importantes.

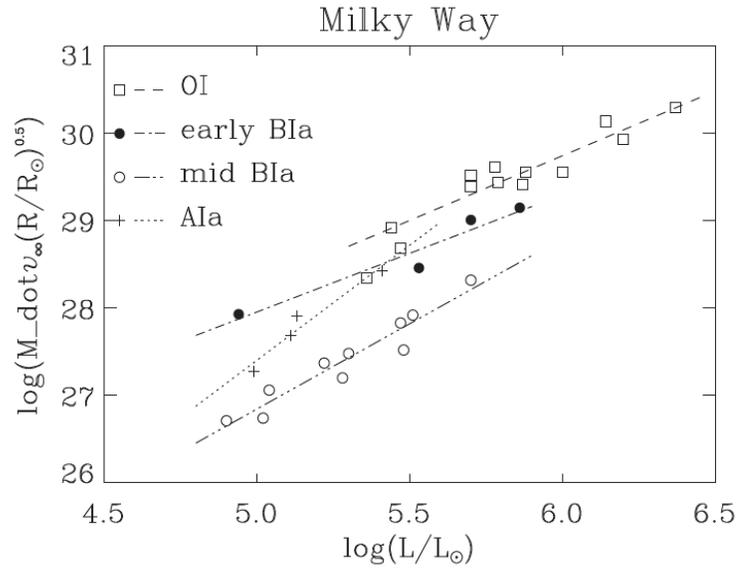


Figura 1.3: WLR para estrellas O, B y A Supergigantes. Para todos estos tipos espectrales se ha encontrado una relación entre el momentum del viento y la luminosidad. Sin embargo, la WLR varía como función del tipo espectral. Imagen extraída de Kudritzki & Puls (2000)

1.3. Motivación

En conocimiento de la existencia de una solución lenta δ (ver sección 2.3.3) para los vientos de estrellas BA supergigantes, se pretende buscar una solución analítica. Esto implica simplificar y reducir los cálculos de una solución numérica que utiliza la hidrodinámica de la estrella. Para obtener la solución analítica de los vientos con solución lenta δ , primero se debe saber su comportamiento en función de los parámetros estelares y del viento. Conociendo su relación con estos parámetros, sería posible crear una función dependiente de éstos. Para ello, se debe tener una malla computacional que abarque todos estos parámetros y luego analizar su dependencia. La importancia de obtener una solución analítica para los vientos con solución lenta δ radica en la simplificación de los cálculos que se deben realizar para obtener la misma solución utilizando la hidrodinámica, tal como lo hace el perfil β (ver sección 2.3.1) para las soluciones rápidas. Una aplicación de esta solución analítica se podría llevar al área de los códigos de transporte radiativo, los que utilizan un perfil velocidades para la obtención de un espectro sintético. La eficiencia computacional utilizando la solución analítica en vez de la numérica se vería altamente favorecida.

El desarrollo de esta tesis se presentará de la siguiente manera: en el *capítulo 2* muestran las ecuaciones que dominan la hidrodinámica de los vientos impulsados por radiación y los tipos de soluciones que se han encontrado para estos vientos. Luego en el *capítulo 3*, se explican dos metodologías cuya finalidad es la obtención de soluciones analíticas para la solución rápida, en el siguiente capítulo, se obtiene una solución analítica para soluciones lentas δ . En el *capítulo 4* se explica la malla computacional que se realiza y los resultados que se encuentran con ella (solución analítica en función de los parámetros estelares y del viento). Para finalizar, el *capítulo 5* describe un resumen de lo realizado, junto con las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Teoría de los Vientos Estelares en Estrellas Masivas

2.1. Aceleración del viento debido a la radiación

Intuitivamente la luz no parecería ser una buena fuente para la transferencia de momentum. Esto, es principalmente porque el momentum de un fotón se determina dividiendo su energía por la máxima velocidad posible, c , la velocidad de la luz. Pero las estrellas masivas no son objetos ordinarios, ellas son muy calientes y luminosas. En su caso, los fotones comienzan a ser un factor dominante en el control de la física del flujo de material de la superficie estelar.

El planteamiento que se expone a continuación, se basa en el desarrollado por Lamers & Cassinelli (1999).

2.1.1. Absorción de fotones de una atmósfera en expansión

Para describir la presión de radiación debido a la líneas espectrales, se comienza considerando un ion de peso atómico m_i que tiene una transición electrónica entre los niveles l (inferior) y u (superior) con energía $h\nu_0$ y longitud de onda λ_0 . El coeficiente de absorción κ_ν en $cm^2 g^{-1}$ en esta línea es,

$$\kappa_\nu \rho = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_l n_l \left(1 - \frac{n_u g_l}{n_l g_u} \right) \phi(\Delta\nu) = \kappa_l \rho \phi(\Delta\nu), \quad (2.1)$$

con

$$\kappa_l = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_l \frac{n_l}{\rho} \left(1 - \frac{n_u g_l}{n_l g_u} \right) \quad (2.2)$$

(κ_l en $cm^2 g^{-1}$ y $\kappa_l \rho$ en cm^{-1}) con n_l y n_u la densidad numérica en cm^{-3} de los iones en los niveles l y u respectivamente, g_l y g_u son los correspondientes pesos estadísticos y f_l es la intensidad del oscilador (*oscillator strength*) de la transición. La constante $\pi e^2/m_e c$, donde e es la carga del electrón y m_e es la masa del electrón, cuyo valor de $0,02654 cm^2 s^{-1}$. El perfil de la línea $\phi(\Delta\nu)$ con $\Delta\nu = \nu - \nu_0$ está centrado alrededor de ν_0 y normalizado para

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta\nu) d\Delta\nu = 1 \quad (2.3)$$

con $\phi(\Delta\nu)$ en Hz^{-1} ó en s . El perfil de la línea ϕ describe la transición debido al ancho intrínscico, el ensanchamiento amortiguado y los movimientos turbulentos a pequeña escala (*micro-turbulencia*) en el gas. La densidad en los vientos estelares es tan baja ($n \lesssim 10^{11} \text{ átomos}/cm^3$) que el amortiguamiento puede ser despreciado y el ancho del perfil ϕ esta deteminado principalmente por los movimientos térmicos y turbulentos de los átomos del viento. En el caso que ϕ sea una función Gaussiana:

$$\phi(\Delta\nu) d\Delta\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu_G} e^{-(\Delta\nu/\Delta\nu_G)^2} d\Delta\nu, \quad (2.4)$$

con un ancho Gaussiano

$$\Delta\nu_G = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2}{3} (\langle v_{th}^2 \rangle + \langle v_{turb}^2 \rangle)} \quad (2.5)$$

donde $\langle v_{th}^2 \rangle = 3kT/m_i$ y $\langle v_{turb}^2 \rangle$ son los promedios de las velocidades cuadráticas debido a los movimientos térmicos y turbulentos, respectivamente. Para propósitos prácticos se puede suponer que el perfil de la línea se extiende cerca de $1,5 \Delta\nu_G$ en cada lado de ν_0 , debido que el coeficiente de absorción en $\Delta\nu = 1,5 \Delta\nu_G$ equivale al 10 % del valor del coeficiente en el centro de la línea.

Si ahora consideramos la absorción de fotones provenientes de la estrella debido a la transición de la línea, suponemos que el viento tiene un incremento monotonico en una ley de velocidades $v(r)$. Esto produce un corrimiento Doppler en el coeficiente de absorción del viento. Por ejemplo, si nos fijamos en el destino que sufre un fotón de frecuencia ν_p emitido en la fotosfera a lo largo de la línea z que forma un ángulo

θ' con respecto a la dirección radial (Figura 2.1), con $\mu' = \cos\theta'$, el fotón puede ser absorbido por la transición de la línea si en algún lugar, a lo largo de su camino en z , se encuentra con iones que tengan una velocidad v en la dirección z tal que el corrimiento Doppler lleve al fotón dentro del ancho de la línea de transición en el marco de referencia del ion:

$$\nu_0 - 1,5\Delta\nu_G \leq \nu_p(1 - v_z/c) \leq \nu_0 + 1,5\Delta\nu_G. \quad (2.6)$$

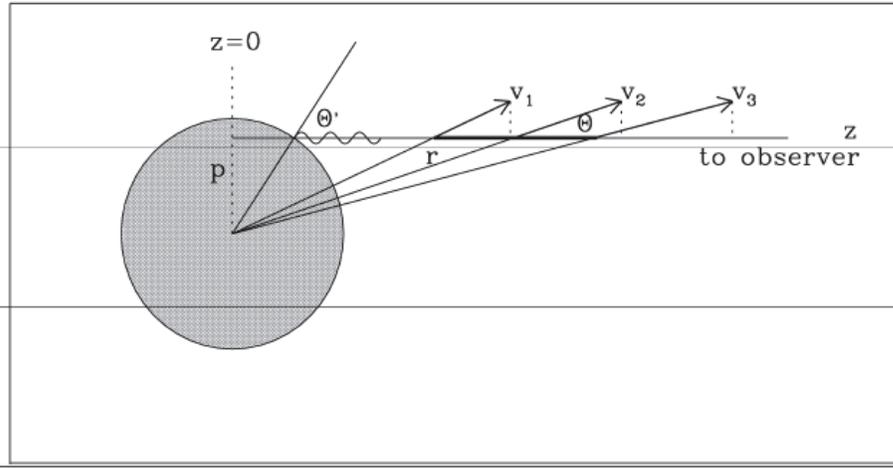


Figura 2.1: Un fotón de frecuencia ν_p es emitido de la fotosfera con un ángulo θ' en la línea de visión z al observador. Este fotón puede ser absorbido en el viento por una línea con frecuencia central $\nu_0 < \nu_p$ y un ancho Doppler de ν_G en la región de interacción, indicado por una línea horizontal y descrito por la ecuación 2.12. Imagen extraída de Lamers & Cassinelli (1999)

Si el ancho de la línea fuera infinitesimalmente pequeño, ν_p debería ser igual a $\nu_0/(1 - v_z/c)$. La ubicación en el viento donde esto sucede es llamada *región de interacción de la línea*.

Los fotones emitidos a una frecuencia $\nu_p < \nu_0 - 1,5\Delta\nu_G$ no tienen una región de interacción con su transición a lo largo de su camino a través del viento: ellos tienen una frecuencia muy baja para ser absorbidos por la transición en cualquier lugar del viento que se aleja. Los fotones con $\nu_p \geq (\nu_0 + 1,5\Delta\nu_G)/(1 - v_\infty/c) \simeq (\nu_0 + 1,5\Delta\nu_G)(1 + v_\infty/c)$ tampoco pueden ser absorbidos, ellos tienen una frecuencia muy alta para ser absorbidos en algún lugar del viento. Consecuentemente, sólo los fotones (provenientes de la fotosfera) con:

$$(\nu_0 - 1,5\Delta\nu_G) \leq \nu_p \leq (\nu_0 + 1,5\Delta\nu_G)(1 + v_\infty/c), \quad (2.7)$$

pueden ser absorbidos en el viento por esa línea.

La geometría del modelo se muestra en la 2.1. La línea de visión del observador es definida por el parámetro de impacto p . A una distancia r del centro de la estrella la línea de visión hace un ángulo θ con el vector radial. El ángulo θ y θ' están relacionados por:

$$r \sin \theta = R_* \sin \theta' = p. \quad (2.8)$$

La velocidad v_z a lo largo de la línea de visión es:

$$v_z(r) = \cos \theta v(r) = \frac{z}{r} v(r) = \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{r} v(r). \quad (2.9)$$

Considerando a un fotón de frecuencia ν_p emitido en la fotosfera en dirección θ' , éste puede ser absorbido en el viento por una transición con una frecuencia en reposo ν_0 , en un rango de frecuencias $\nu_0 + \Delta\nu$, con $-1,5\Delta\nu_G < \Delta\nu < 1,5\Delta\nu_G$ dentro del perfil de la función. La absorción ocurre a una distancia radial r del centro de la estrella, la cual es descrita por la condición

$$\nu_0 + \Delta\nu = \nu_p \left(1 - \cos \theta \frac{v(r)}{c} \right) = \nu_p \left(1 - \frac{z}{r} \frac{v(r)}{c} \right), \quad (2.10)$$

o equivalentemente por,

$$v_z = v(r) \cos \theta = (c/\nu_p) [\nu_p - (\nu_0 + \Delta\nu)]. \quad (2.11)$$

Esto significa que el fotón puede ser absorbido o dispersado en la *región de interacción* de su camino, la cual está dada por:

$$\frac{\nu_p - \nu_0 - 1,5\Delta\nu_G}{\nu_p} \leq \frac{z}{r} \frac{v(r)}{c} \leq \frac{\nu_p - \nu_0 + 1,5\Delta\nu_G}{\nu_p}. \quad (2.12)$$

Para una ley de velocidades $v(r)$ la distancia r donde la interacción ocurre puede ser calculada usando esta ecuación.

La figura 2.2 muestra la región de interacción de otra manera. La figura superior muestra la componente v_z de velocidad del viento a lo largo del camino z del fotón, emitido a una frecuencia ν_p . La figura del medio muestra la línea del coeficiente de absorción κ_ν de una línea con frecuencia central ν_0 para el fotón ν_p a lo largo de su camino. El punto z_S es el punto de interacción para la línea central donde $\nu_z = c(1 -$

ν_0/ν_p). El coeficiente no es cero en la región de interacción, cuyos límites son indicados por las líneas discontinuas externas. La figura inferior muestra la profundidad óptica $\tau_l(z)$ a lo largo de la línea de visión. Ésta incrementa desde cero hasta un valor máximo en la región de interacción de la línea.

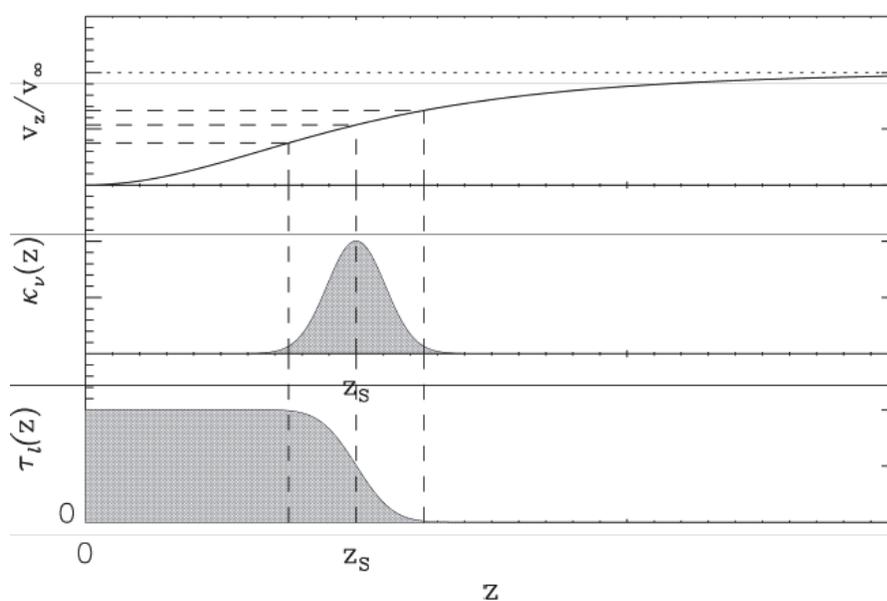


Figura 2.2: Absorción de la línea y profundidad óptica. Imagen extraída de Lamers & Cassinelli (1999)

2.1.2. Aceleración radiativa debido a las líneas espectrales

La aceleración radiativa g_{rad} debido a la absorción de la radiación estelar, en las líneas espectrales, en alguna posición del viento depende de la opacidad de la línea y del flujo F_ν de la radiación. Este flujo depende de la intensidad emitida en la fotosfera y de la absorción entre la fotosfera y la posición donde se desea calcular la presión radiativa. En general, este es un complicado problema de transferencia radiativa. Sin embargo, si la aproximación de Sobolev (ver apéndice A) puede ser adoptada, el problema se reduce, debido a que en esta aproximación un fotón emitido desde la fotosfera puede interactuar con un ion que lo absorbe sólo en un punto (punto de Sobolev, r_S). Esto significa que los fotones provenientes de la fotosfera interactúan con el gas en algún punto r en el viento no han tenido interacción con el viento antes de alcanzar r . Entonces el flujo de radiación que produce la aceleración

radiativa depende sólo de la intensidad emitida por la fotosfera y las condiciones locales en r . La intensidad local puede ser descrita en términos de una cantidad llamada *probabilidad de penetración*, la cual describe la fracción de radiación entrante que alcanza un punto r a través de la región de Sobolev. En forma similar, la radiación emitida o dispersada de un punto en el viento puede ser expresada en términos de una *probabilidad de escape*.

Probabilidad de penetración

Si se considera la intensidad de radiación proveniente de la fotosfera hasta que alcanza un punto r en el viento. La radiación llega en un ángulo θ respecto al vector radial al punto r , con $\mu = \cos(\theta)$. Este ángulo no puede ser más grande que cierto límite θ_* el cual describe la extensión angular subtendida por el disco de la fotosfera como es visto desde el punto r ,

$$\cos\theta \equiv \mu_* = \sqrt{1 - (R_*/r)^2}. \quad (2.13)$$

Entonces la intensidad que llega a r es cero, si $\mu < \mu_*$.

Si se supone que la estrella radía como un disco homogéneo, sin *limb darkening* (oscurecimiento hacia el borde), entonces la intensidad proveniente de la fotosfera es $I_\nu^*(\mu) \equiv I_\nu^*$. La radiación que alcanza un punto r es:

$$I_{\nu_p}(\mu) = I_{\nu_p}^* e^{-\tau_{\nu_p}(\mu)}, \quad (2.14)$$

donde $\tau_\nu(\mu)$ es la profundidad óptica debido a la absorción de la línea en el viento.

La profundidad óptica esta definida por:

$$\begin{aligned} \tau_{\nu_p}(\mu) &= \int_{R_*}^r \kappa_{\nu_p} \rho dl \\ &= \kappa_l \rho \left(\frac{dl}{d\Delta\nu} \right) \int_{\Delta\nu(R_*)}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu) d(\Delta\nu) \\ &= \tau_{\nu_0} \int_{\Delta\nu(R_*)}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu) d\Delta\nu, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde la integral es a lo largo del camino de los fotones l , provenientes de la fotosfera hasta el punto r en el viento. Se ha expresado el coeficiente de absorción en términos

de la ecuación 2.1, con $\Delta\nu = \nu_p - \nu_0(1 + \mu v(r)/c)$ (ecuación A.7).

Se define la integral de la ecuación 2.15 como:

$$\Phi(\Delta\nu_\mu) = \int_{\Delta\nu(\text{fotosfera})}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu) d\Delta\nu, \quad (2.16)$$

con

$$\Delta\nu_\mu = \nu_p - \nu_0(1 + \mu v(r)/c). \quad (2.17)$$

La cantidad Φ describe la integral del perfil de absorción de la línea con frecuencia de reposo ν_0 para un fotón emitido con frecuencia ν_p desde la fotosfera. $\phi(\Delta\nu)$ es normalizado siguiendo que $\Phi(\infty) = 1$ y $\Phi(-\infty) = 0$. La definición de Φ se ilustra en la figura 2.3.

Si se asume que no hay absorción de la línea en la fotosfera cerca de ν_0 , consecuentemente la intensidad emitida por la fotosfera es constante en el intervalo $\nu_0 - 1,5\Delta\nu_G$ y $(\nu_0 + 1,5\Delta\nu_G)(1 + v_\infty/c)$, el cual es el rango en donde la radiación de la fotosfera puede ser absorbida por la línea, entonces $I_{\nu_p}^* \simeq I_{\nu_0}^*$, donde $I_{\nu_0}^*$ es la intensidad del continuo.

Se desea expresar la intensidad media J_ν de la radiación en cualquier punto r en el viento en términos de la intensidad de la fotosfera $I_{\nu_0}^*$. La intensidad de la radiación emitida en la fotosfera llegando a r con $\mu = \cos \theta$ es:

$$I_{\nu_p}(\mu) = I_{\nu_0}^* e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu_\mu)}. \quad (2.18)$$

La intensidad media J_{ν_p} por estereorradián de radiación de frecuencia ν llegando de la fotosfera y alcanzando r es la integral de $I_{\nu_p}(\mu)$ sobre el ángulo sólido del disco fotoesférico como si fuera visto a una distancia r , dividido por 4π , es decir:

$$J_{\nu_p}(r) = \frac{1}{2} \int_{\mu_*}^1 I_{\nu_p}(\mu) d\mu = \frac{1}{2} I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu_\mu)} d\mu. \quad (2.19)$$

La intensidad media promediada sobre el perfil de la línea es la integral de $J_{\nu_p}(r) \phi(\Delta\nu_\mu)$ sobre el perfil de la línea completo,

$$\bar{J}(r) = \frac{1}{2} I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \int_{\Delta\nu_\mu=-\infty}^{\Delta\nu_\mu=\infty} \phi(\Delta\nu_\mu) e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu_\mu)} d\Delta\nu_\mu d\mu. \quad (2.20)$$

La definición de $\Phi(\Delta\nu_\mu)$, dada por la ecuación 2.16, muestra que se puede escribir

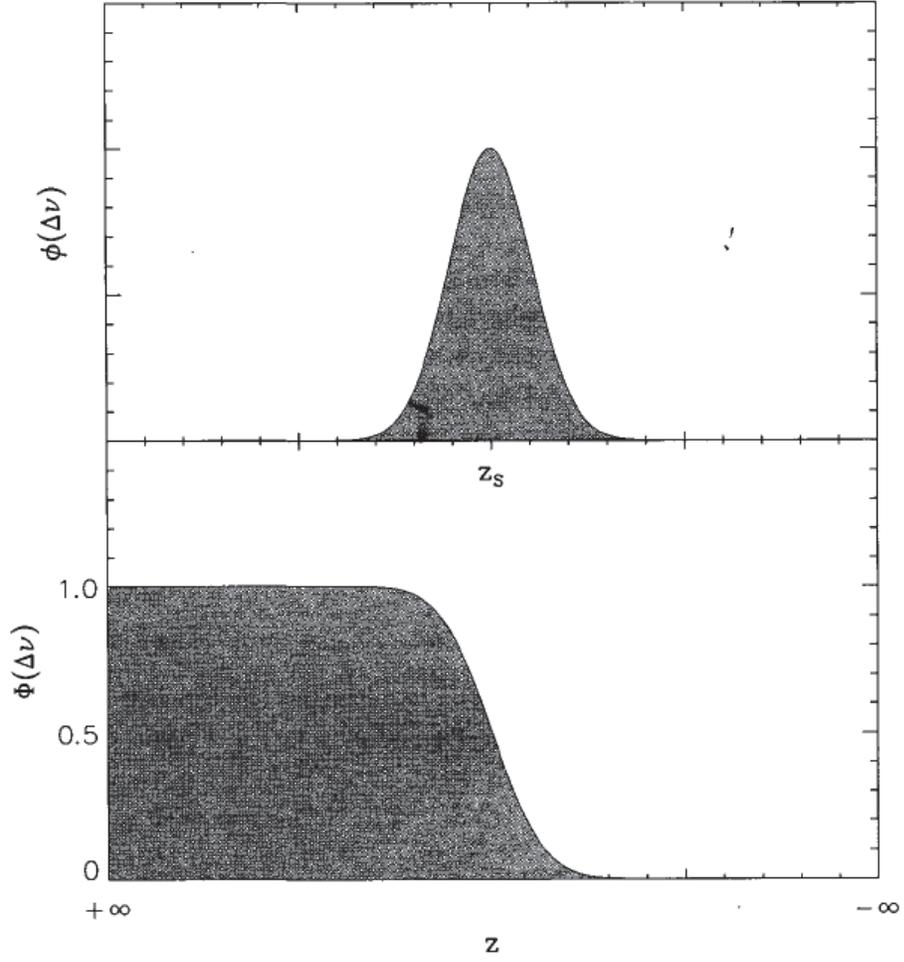


Figura 2.3: Definiciones de $\phi(\Delta\nu)$ y $\Phi(\Delta\nu)$. Imagen extraída de Lamers & Cassinelli (1999)

$\Phi(\Delta\nu_\mu)d\Delta\nu_\mu = d\Phi(\Delta\nu_\mu)$, la cual reduce la integral a:

$$\begin{aligned}
 \bar{J}(r) &= \frac{1}{2} I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \int_0^1 e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu_\mu)} d\Phi \Delta\nu_\mu d\mu \\
 &= \frac{1}{2} I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu \\
 &= \beta_c(r) I_{\nu_0}^*.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Definiendo la *probabilidad de penetración* en el punto r como:

$$\beta_c(r) = \frac{1}{2} \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu, \quad (2.22)$$

donde el subíndice c se usa para la radiación proveniente del centro, esto es, desde la fotosfera. La dependencia de τ_{ν_0} en μ esta dada por la ecuación A.9. La probabilidad de penetración describe la cantidad de radiación fotosférica que alcanza un punto r en términos de la razón $\bar{J}(r)/I_{\nu_0}^*$. Si la profundidad óptica de Sobolev τ_{ν_0} en un punto r es muy grande, la probabilidad de penetración se acerca a 0. Si τ_{ν_0} es muy pequeño, $\tau_{\nu_0} \ll 1$, el integrando se acerca a 1 y $\beta_c \simeq (1 - \mu_*)/2$. Este corresponde al factor geométrico de dilución $W(r)$, definido como:

$$W(r) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - (R_*/r)^2} \right] \quad (2.23)$$

$$W(r) \simeq (R_*/2r)^2 \text{ si } r \gg R_*$$

La Probabilidad de escape

La *probabilidad de escape* para los fotones dejando la región de Sobolev alrededor de r es análogo a la probabilidad de penetración porque es igualmente difícil (o fácil) para un fotón de frecuencia ν_p alcanzar un punto r proveniente de una gran distancia en un ángulo μ , como esto es para un fotón de frecuencia ν_p escapar de la región de Sobolev alrededor de r en el mismo ángulo. Entonces la *probabilidad de escape* es

$$\beta(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu. \quad (2.24)$$

En este caso se ha integrado sobre todos los ángulos, y no sólo sobre μ_* a 1, debido a que los fotones pueden escapar en todas direcciones, no sólo en la dirección hacia la fotosfera.

Aceleración radiativa desde una fuente puntual

Teniendo una expresión para la intensidad de la radiación estelar que penetra en la región de Sobolev alrededor de algún punto r en un ángulo μ , se puede calcular el flujo y derivar una expresión para la aceleración radiativa en r debido a una línea espectral. Consideraremos sólo la aceleración causada por la radiación que llega directamente de la fotosfera estelar. Sabemos que también hay radiación difusa de

la línea en el viento, la cual proviene de multiples dispersiones. Esta radiación es casi isotrópica y su contribución a la aceleración total del viento es muy pequeña. La opacidad del continuo, debido a la transiciones ligado-libre (foto-ionizaciones), es usualmente mucho más débil que la opacidad de la línea y es ignorada en los cálculos. La aceleración radiativa debido a la dispersión del electrón es tomada en cuenta ya que es importante en los vientos de estrellas masivas.

La fuerza de la radiación por gramo de gas es igual al momentum de la radiación abosrbida por segundo. Esto es igual a la componente radial de la intensidad multiplicada por el coeficiente de absorción y dividido por c . La aceleración radiativa debido a la abosorción de la línea es:

$$g_{rad} = \frac{2\pi}{c} \int_{\mu_*}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_{\nu_p}(\Delta\nu) I_{\nu_p}(\mu) d(\Delta\nu) \mu d\mu, \quad (2.25)$$

con el coeficiente de absorción por gramo κ_{ν_p} dado por la ecuación 2.1, $\Delta\nu$ dado por la ecuación 2.10 y $I_{\nu_p}(\mu)$ dado por la ecuación 2.18. Esta es una integral difícil de resolver debido a la asociación entre $\Delta\nu$ y μ . Puede ser simplificada si se asume por simplicidad que toda la radiación proveniente de la fotosfera es absorbida en algún punto r en el viento, el cual fluye radialmente desde la estrella. Esto es llamado *límite de una fuente puntual* ya que es equivalente a suponer que la estrella es una fuente puntual. Es una razonable aproximación si se está lejos de la estrella, pero cerca de la estrella la aproximación no es buena, debido a que la radiación llega con un ángulo diferente de la dirección radial.

La razón por la cual se utiliza esta aproximación es que se obtiene una expresión más simple para el término de la aceleración radiativa debido a la líneas espectrales. Con esta simple expresión se puede resolver la ecuación de momentum de los vientos impulsado por radiación y derivar las propiedades básicas de estos vientos: pérdida de masa, perfil de velocidad y velocidad terminal.

La expresión para g_{rad} es la ecuación 2.25, éste puede ser escrita en términos de la probabilidad de penetración como:

$$\begin{aligned}
g_{rad} &= \frac{2\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta\nu) e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu)} d(\Delta\nu) \mu d\mu \\
&= \frac{2\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \int_0^1 e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu)} d\Phi(\Delta\nu) \mu d\mu \\
&= \frac{2\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} \mu d\mu.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En el límite de una fuente puntual, donde los fotones están fluyendo radialmente desde la estrella, se puede ignorar el factor μ en el integrando, debido a que $\mu \simeq 1$, y se obtiene:

$$g_{rad} \simeq \frac{2\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu = \frac{4\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \beta_c(r) = \frac{4\pi}{c} \kappa_l \bar{J}(r) \tag{2.27}$$

La probabilidad de penetración para un flujo de fotones fluyendo radialmente es:

$$\beta_c(r) = \frac{1}{2} \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu \simeq \frac{(1 - \mu_*)}{2} \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}^{(\mu=1)}}}{\tau_{\nu_0}(\mu = 1)} \tag{2.28}$$

con

$$\tau_{\nu_0}(\mu = 1) = \kappa_l \rho \frac{c}{\nu_0} \left(\frac{dr}{dv} \right) \tag{2.29}$$

El término $(1 - \mu_*)/2$ es el factor geométrico de dilución $W(r)$.

2.1.3. Aceleración radiativa debido a un ensamble de líneas

La aceleración radiativa en los vientos estelares es producida por un gran ensamble de líneas, con un amplio rango de profundidades ópticas. La aceleración radiativa total de las líneas g_L es el resultado de la suma de las contribuciones de todas las líneas individuales l con frecuencias en reposo ν_l . En la aproximación de Sobolev esta aceleración puede calcularse de la siguiente forma,

$$g_L = \frac{2\pi}{c} \sum_l \kappa_l \int_{\mu_*}^1 I_{\nu_l} \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_l}}}{\tau_{\nu_l}} \mu d\mu \tag{2.30}$$

En esta expresión I_{ν_l} es la intensidad, a la frecuencia de la línea ν_l , de la radia-

ción proveniente de la fotosfera que alcanza un punto r bajo un ángulo $\arccos \mu$. Si hay muchas líneas de absorción, la intensidad saliendo de la fotosfera puede ser atenuada por la absorción en la frecuencia de la línea entre la fotosfera y el punto r . Si este efecto es despreciado la intensidad se puede aproximar a: $I_{\nu_l}(r, \mu) \simeq I_{\nu_l}^*(\mu)$. Si el espectro de la fotosfera es suave, es decir, sin líneas de absorción profundas o discontinuidades abruptas, y si la fotosfera radía como un disco homogéneo, es decir, no hay efectos de oscurecimientos en el borde (*limb darkening*), $I_{\nu_l}(\mu) = I_{\nu_l}^*$ para $\mu_* \leq \mu \leq 1$, entonces la aceleración radiativa debida a las líneas puede aproximarse como:

$$g_L = \frac{2\pi}{c} \sum_l \kappa_l I_{\nu_l}^* \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_l}}}{\tau_{\nu_l}} \mu d\mu. \quad (2.31)$$

2.2. Modelo estándar CAK

La fuerza radiativa debido a las líneas espectrales puede ser calculado considerando las contribuciones descritas por la ecuación 2.30, de todas las transiciones posibles. Esto requiere el cálculo del grado de ionización y excitación para un gran número de niveles de energía de diferentes elementos. Para cada posible transición de línea, se puede calcular la profundidad óptica de Sobolev. Este es un cálculo difícil que ha sido realizado por Abbott (1982), por PPK y Shimada et al. (1994).

El número de líneas espectrales que pueden ser tomadas en cuenta en forma explícita puede reducirse drásticamente si se considera que la densidad en el viento es baja ($\rho \lesssim 10^{-12} \text{ g cm}^{-3}$). Es posible despreciar los casos de excitación colisional y sólo tomar en cuenta las líneas provenientes del nivel base o aquellas de niveles de excitación más bajos y de niveles metaestables, para contribuir con la fuerza de radiación. Con estas restricciones el número de líneas posibles se reduce a alrededor de unas 10^5 líneas.

La distribución de las líneas sobre las frecuencias no es homogénea. Hay rangos de frecuencias en donde sólo unas pocas líneas contribuyen a la aceleración radiativa y rangos que son poblados con muchas líneas. Esto significa que muchas de las líneas de absorción pueden coincidir en el espacio de frecuencias. Esto también significa que la suposición acerca de que la fuerza radiativa de la fotosfera alcanzando el punto Sobolev de una línea en particular a una determinada distancia r no estará afectada

por la presencia de otras líneas no es estrictamente válido.

El efecto donde los fotones son absorbidos por diferentes líneas en diferentes lugares del viento es llamado *dispersión múltiple*. Este efecto será ignorado en lo que sigue de los modelos.

Una vez que la fuerza es tabulada cubriendo un amplio rango de condiciones, la fuerza puede ser parametrizada de una manera simple, de tal manera que la ecuación de momentum puede ser resuelta, obteniendo la pérdida de masa y la distribución de velocidad.

2.2.1. Parametrización de la aceleración radiativa

Como ya se ha mencionado en el apéndice A, la aceleración radiativa debido a las líneas espectrales depende de la profundidad óptica de Sobolev. La expresión para la profundidad óptica de las líneas (ecuación A.9) contiene una parte que depende de la línea $f \lambda_0 n_l$, y una parte que depende de la estructura del viento ($\rho, dv/dr$). Esta segunda parte es la misma para todas las líneas que contribuyen a la aceleración radiativa.

CAK introdujo el parámetro de la profundidad óptica adimensional, definido por:

$$t \equiv \sigma_e v_{th} \rho (dr/dv), \quad (2.32)$$

donde σ_e es el coeficiente de la dispersión de Thompson, la velocidad v_{th} es la velocidad térmica media de los protones en el viento con una temperatura igual a la temperatura efectiva de la estrella,

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2k_B T_{eff}}{m_H}}, \quad (2.33)$$

donde k_B es la constante de Boltzman.

La aceleración radiativa total g_L debido a todas las líneas espectrales puede ser expresada en términos de la aceleración radiativa debido a los electrones (dispersión de Thompson) para el valor de σ_e , por un factor de multiplicación $M(t)$, el cual es denominado *multiplicador de fuerza*,

$$g_L \equiv g_e M(t), \quad (2.34)$$

con

$$g_e \simeq \frac{\sigma_e F}{c} = \frac{\sigma_e L_*}{4\pi r^2 c}. \quad (2.35)$$

La aceleración radiativa y por ende $M(t)$, depende de la composición química (abundancia), de la ionización y excitación en el viento. A su vez, la ionización depende de la radiación estelar, T_{eff} y n_e/W , donde n_e es la densidad de electrones libres y $W(r)$ es el factor geométrico de dilución. Esto es porque la tasa de fotoionización depende del flujo de la estrella a una distancia r , la cual es proporcional a $W(r)$, y la tasa de recombinación depende de la densidad de electrones.

Los valores de $\log M(t)$ son graficados en la figura 2.4 para diferentes valores de T_{eff} como una función de $\log t$, basado en los cálculos de Abbott (1982) y Shimada et al. (1994). Note que estos valores pueden ser bien aproximados por una simple ley de potencias (línea punteada). La dependencia de $n_e/W(r)$ también puede ser aproximada por una ley de potencias. Esto significa que $M(t)$ puede ser aproximado por una simple función del tipo

$$M(t) = k t^{-\alpha} (10^{-11} n_e/W)^\delta \quad (2.36)$$

Entonces, la aceleración debido a las líneas puede ser escrita como:

$$g_L = \frac{\sigma_e L_*}{4\pi c r^2} k t^{-\alpha} (10^{-11} n_e/W)^\delta. \quad (2.37)$$

Las cantidades k , α y δ son llamadas *parámetros del multiplicador de fuerza*. (ver valores en Tabla 8.2 en Lamers & Cassinelli 1999). Típicamente, los valores de α varían entre 0,45 y 0,65, esto significa que la aceleración radiativa es debido a una mezcla de líneas ópticamente gruesas y delgadas.

2.2.2. Vientos impulsados por las líneas en el límite de una fuente puntual

Ahora se derivará el modelo de vientos impulsados por radiación basados en la aproximación para g_L (dada por la ecuación 2.37) y considerando un fluido isotérmico unidimensional bajo un régimen estacionario con simetría esférica, despreciando los efectos de viscosidad, conducción calórica y campos magnéticos. Además, se comenzará considerando la suposición que la fotosfera puede ser tratada como una fuente puntual, esto significa que la radiación tiene sólo dirección radial. En la sección 2.2.3

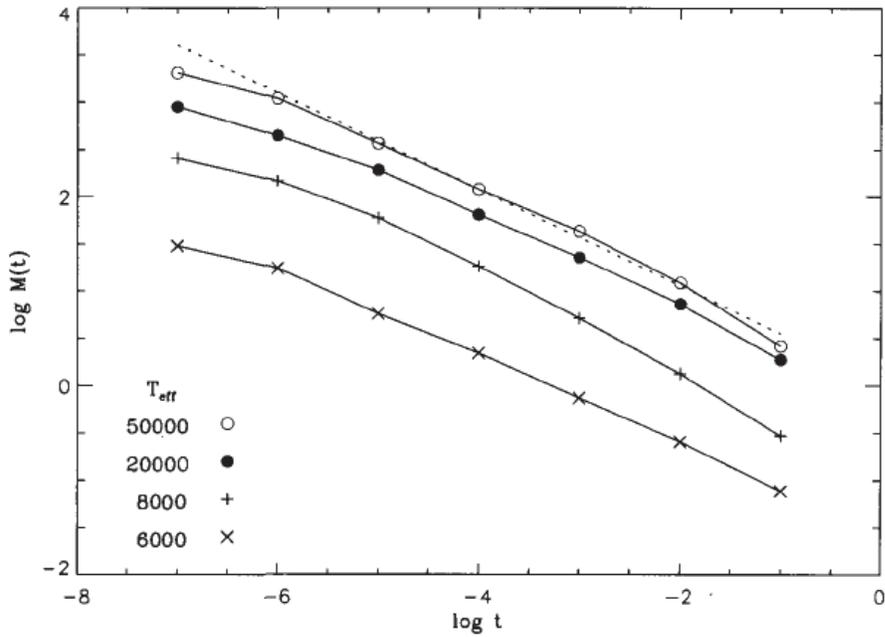


Figura 2.4: Multiplicador de fuerza versus t para distintas T_{eff} . La línea punteada corresponde a una ley de potencias. Imagen extraída de Lamers & Cassinelli (1999)

se discutirá como este resultado varía al considerar el tamaño de la estrella.

Utilizando estas suposiciones, la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0. \quad (2.38)$$

Integrando esta ecuación se obtiene el flujo total de masa (pérdida de masa, \dot{M}) a través de un cascarón esférico de radio r alrededor de la estrella,

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \text{constante}. \quad (2.39)$$

La ecuación de momentum se expresa como:

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{G M_*}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + g_e + g_L, \quad (2.40)$$

donde g_e es la aceleración radiativa debido a la opacidad del continuo producida por la dispersión de los electrones y g_L es la aceleración debido a las líneas. Se puede escribir,

$$g_e(r) = \frac{\sigma_e(r)L_*}{4\pi r^2 c} = \frac{G M_*}{r^2} \Gamma(r), \quad (2.41)$$

donde

$$\Gamma(r) = \frac{\sigma_e(r)L_*}{4\pi c G M_*}. \quad (2.42)$$

El coeficiente de opacidad para la dispersión del electrón, σ_e [$cm^2 g^{-1}$], depende de la composición química y del grado de ionización del viento

$$\sigma_e = \sigma_T \frac{n_e}{\rho} = 0,401(I_H X + I_{He}(Y/4) + I_Z(Z/14)) \quad (2.43)$$

donde $\sigma_T = 6,6524 \times 10^{-25} cm^2$ es la sección transversal del electrón y n_e es el número de electrones por cm^3 . Las cantidades X , Y y Z son las fracciones de masa de hidrógeno (H), helio (He) y átomos más pesados, respectivamente. I_H , I_{He} y I_Z son los números de electrones por ion de H , He y de elementos más pesados.

Si el grado de ionización es constante en el viento, $\sigma_e(r)$ y $\Gamma(r)$ son constantes. En el caso de la aceleración gravitacional y g_e , pueden ser combinadas en un sólo término $G M_{eff}/r^2$, con

$$M_{eff} = M_*(1 - \Gamma). \quad (2.44)$$

Debido a las altas temperaturas y bajas densidades del viento, éste se comporta como un gas ideal. Por lo tanto, de la ecuación de estado se obtiene: $p = a^2 \rho$. Entonces dp/dr puede ser expresado en términos de v y la velocidad isotérmica del sonido a (debido a la ecuación de estado y la ecuación 2.39):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{-2a^2}{v} \frac{dv}{dr} - \frac{2a^2}{r}. \quad (2.45)$$

Utilizando esto último se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\frac{v dv}{dr} = -\frac{G M_*(1 - \Gamma)}{r^2} + \frac{a^2}{v} \frac{dv}{dr} + \frac{2a^2}{r} + g_L. \quad (2.46)$$

Sustituyendo la ecuación 2.37 para g_L , multiplicando la ecuación 2.46 por r^2 y reordenando los términos, se obtiene

$$\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right) r^2 \frac{vdv}{dr} = -GM_*(1 - \Gamma) + 2a^2r + C(r^2vdv/dr)^\alpha \left(\frac{10^{-11}n_e}{W}\right)^\delta. \quad (2.47)$$

La constante C es definida por:

$$C = \frac{\sigma_e L_* k}{4\pi c} \left(\frac{\sigma_e v_{th} \dot{M}}{4\pi}\right)^{-\alpha} = \Gamma GMk \left(\frac{4\pi}{\sigma_e v_{th} \dot{M}}\right)^\alpha. \quad (2.48)$$

2.2.3. El factor de corrección de disco finito

El modelo previamente descrito supone que la radiación del viento tiene sólo dirección radial, esto es, la estrella es considerada como una fuente puntual. Esta es una buena aproximación lejos de la estrella, pero es imprecisa cerca de la estrella, donde la radiación tiene una significativa cantidad de momentum no radial. Por lo tanto, la fuerza de radiación, en el modelo de fuente puntual, es sobrestimada cerca de la estrella. A continuación se derivará el factor de corrección para la presión de radiación que toma en cuenta el tamaño finito de la estrella. Esto es llamado el *factor de corrección de disco finito*.

La aceleración por radiación de un disco finito

Suponiendo que la estrella radía como un disco finito (visto por un observador a una distancia r en el viento), la intensidad de la radiación de la fotosfera bajo un ángulo $\theta = \arccos\mu$ es:

$$I_{\nu_0}(r, \mu) = I_{\nu_0}^* \text{ si } \mu_* \leq \mu \leq 1 \quad (2.49)$$

$$I_{\nu_0}(r, \mu) = 0 \text{ si } 0 \leq \mu \leq \mu_* \quad (2.50)$$

con $\mu_*^2 = 1 - (R_*/r)^2$ (figura 2.5).

La aceleración producida por las líneas espectrales está dada por 2.26,

$$g_{rad} = \frac{2\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} \mu d\mu. \quad (2.51)$$

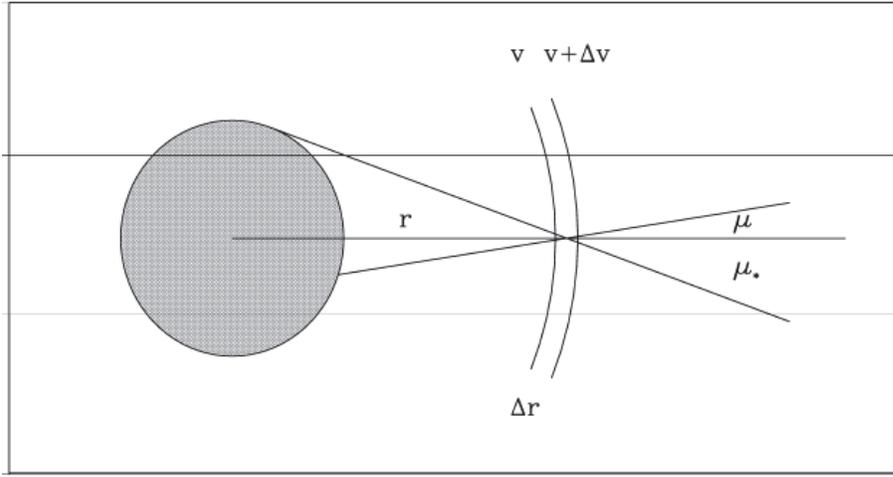


Figura 2.5: Efecto del disco finito. Imagen extraída de Lamers & Cassinelli (1999).

Esta expresión difiere de la expresión 2.27 en la aproximación de fuente puntual por un factor μ *extra* bajo la integral (en la aproximación de fuente puntual simplemente se definió $\mu = 1$). La diferencia entre la ecuación 2.51 y la ecuación 2.27 puede ser expresada en términos de un factor de corrección.

Por otra parte, la profundidad óptica de Sobolev τ_{ν_0} también depende de la distancia y de μ (ecuación A.9),

$$\tau_{\nu_0} = \kappa_l \rho \frac{c}{\nu_0} \frac{r/v}{1 + \sigma \mu^2}, \quad (2.52)$$

donde $\sigma = (d \ln v / d \ln r) - 1$. Ahora, si se desea expresar τ_{ν_0} en términos de los parámetros de la profundidad óptica t , ecuación 2.32, con

$$t = \sigma_e v_{th} \rho \frac{dr}{dv} = \sigma_e v_{th} \rho \frac{r}{v} \frac{1}{1 + \sigma}, \quad (2.53)$$

y eliminando $\rho r/v$ de la ecuación 2.52 por medio de la ecuación 2.53 se obtiene,

$$\tau_{\nu_0} = \frac{\kappa_l}{\sigma_e v_{th}} \frac{c}{\nu_0} \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma \mu^2} t = \eta \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma \mu^2} t, \quad (2.54)$$

donde

$$\eta = \frac{\kappa_l}{\sigma_e v_{th}} \frac{c}{\nu_0}. \quad (2.55)$$

Luego, sustituyendo esta expresión para τ_{ν_0} en la ecuación 2.51 obtenemos una ex-

presión más general para la aceleración debido a una línea como:

$$g_l = \frac{2\pi}{c} \kappa_l I_{\nu_0}^* \int_{\mu_*}^1 \left(\frac{1 + \sigma \mu^2}{1 + \sigma} \right) \frac{1}{\eta l t} \left(1 - e^{-((1+\sigma)/(1+\sigma\mu^2))\eta l t} \right) \mu d\mu. \quad (2.56)$$

La aceleración radiativa debido a un ensamble de líneas es:

$$g_L = \frac{2\pi}{c} \int_{\mu_*}^1 \sum_l \kappa_l I_{\nu_0}^* \left(\frac{1 + \sigma \mu^2}{1 + \sigma} \right) \frac{1}{\eta l t} \left(1 - e^{-((1+\sigma)/(1+\sigma\mu^2))\eta l t} \right) \mu d\mu, \quad (2.57)$$

donde las sumatoria es sobre todas las contribuciones de las líneas.

Nuevamente, la aceleración radiativa puede ser expresada en términos de la fuerza multiplicadora $M(t) = g_L c / \sigma_e F = g_L / g_e$ (ecuación 2.34). En el caso del disco finito, la fuerza multiplicadora es ahora $M'(t) = g_L / g_e$, con g_L definido por la ecuación 2.57,

$$M'(t) = \frac{2\pi}{\sigma_e F} \int_{\mu_*}^1 \sum_l \kappa_l I_{\nu_0}^* \left(\frac{1 + \sigma \mu^2}{1 + \sigma} \right) \frac{1}{\eta l t} \left(1 - e^{-((1+\sigma)/(1+\sigma\mu^2))\eta l t} \right) \mu d\mu. \quad (2.58)$$

En el caso particular en que $\mu \rightarrow 1$ el término entre paréntesis que contiene la exponencial será independiente de μ y puede sacarse de la integral. Esto reduce $M'(t)$ a $M(t)$ obteniéndose nuevamente el límite de una fuente puntual,

$$M(t) = \frac{1 - \mu_*^2}{2} \frac{2\pi}{\sigma_e F} \sum_l \kappa_l I_{\nu_0}^* \frac{1}{\eta l t} (1 - e^{-\eta l t}). \quad (2.59)$$

Observando las diferencias entre $M(t)$ y $M'(t)$ podemos escribir una expresión para $M'(t)$ como:

$$M'(t) = \frac{2}{1 - \mu_*^2} \int_{\mu_*}^1 M \left(t \frac{1 + \sigma}{1 + \sigma \mu^2} \right) \mu d\mu. \quad (2.60)$$

Utilizando la expresión antes definida para $M(t) = kt^{-\alpha} (10^{-11} n_e / W)^\delta$ en función de k , α y δ , podemos escribir el nuevo multiplicador de fuerza como:

$$M'(t) = kt^{-\alpha} \left(\frac{10^{-11} n_e}{W} \right)^\delta \frac{2}{1 - \mu_*^2} \int_{\mu_*}^1 \left(\frac{1 + \sigma}{1 + \sigma \mu^2} \right)^{-\alpha} \mu d\mu \equiv M(t) FC. \quad (2.61)$$

En términos del *factor de corrección de disco finito* FC ,

$$FC = \frac{2}{1-\mu_*^2} \int_{\mu_*}^1 \left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma\mu^2} \right)^{-\alpha} \mu d\mu.$$

Integrando esta expresión se obtiene:

$$FC = \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - (1+\sigma\mu_*^2)^{\alpha+1}}{(1-\mu_*^2)(\alpha+1)\sigma(1+\sigma)^\alpha}. \quad (2.62)$$

La figura 2.6 muestra el comportamiento del FC en función de r . Se puede observar que a medida que nos alejamos de la estrella $FC \approx 1$, reafirmando que la aproximación de una fuente puntual es razonable si se está lejos de la estrella.

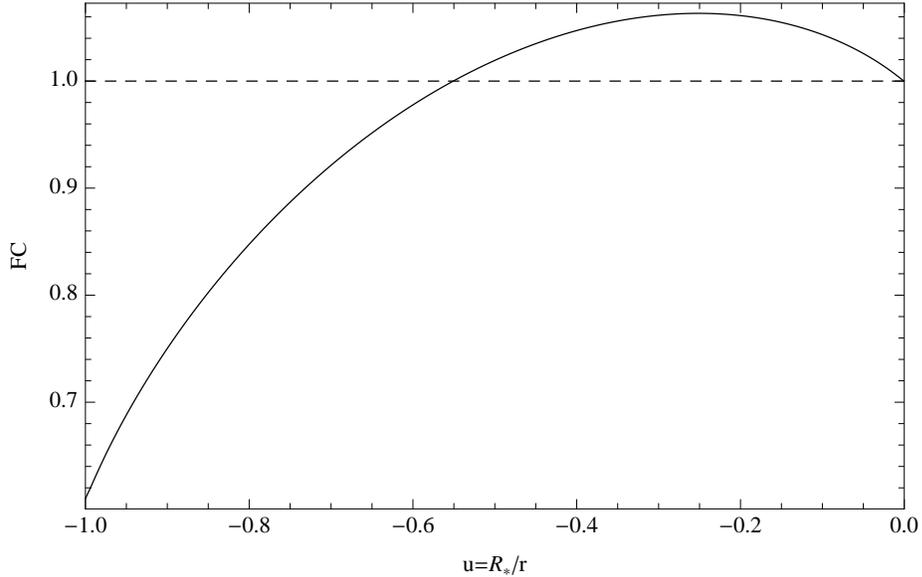


Figura 2.6: FC (línea sólida) para una estrella de tipo O con $v_\infty = 2950 \text{ km/s}$ (Martins et al. 2005) y $\alpha = 0,64$ en comparación con un $FC = 1$ (línea a trazos)

El efecto del disco finito en la pérdida de masa y velocidad

Si el disco finito es tomado en cuenta, la ecuación de movimiento se transforma en:

$$\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right) r^2 v \frac{dv}{dr} = -GM_*(1 - \Gamma) + 2a^2 r + C FC \left(\frac{10^{-11} n_e}{W}\right)^\delta \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^\alpha. \quad (2.63)$$

Esta ecuación, más complicada que la ecuación 2.47 debido al factor de corrección, no tiene solución analítica, lo que implica que debe ser resuelta numéricamente.

El modelo con disco finito difiere del modelo de fuente puntual en:

- La pérdida de masa es más pequeña. Esto es debido a que la aceleración radiativa cercana a la estrella es reducida.
- La velocidad terminal del viento es más grande. Esto surge por dos efectos. a) La pérdida de masa es más pequeña, la densidad es menor y la profundidad óptica de Sobolev es menor. Entonces una mayor aceleración radiativa ocurre, lo que lleva a una mayor velocidad terminal. b) El factor de corrección FC es más grande que la unidad más allá del punto crítico debido a la reducción de la profundidad de Sobolev para $\sigma < 0$. Esto produce un incremento adicional en la velocidad.

Simultáneamente e independientemente, FA y PPK calcularon la influencia del factor de corrección en la dinámica del viento. Ellos encontraron una buena concordancia entre este modelo modificado (m-CAK) y las observaciones para la pérdida de masa y la velocidad terminal en una gran dominio del diagrama HR. Luego, con el fin de facilitar los cálculos, (Kudritzki et al. 1989, KPPA) desarrollaron fórmulas aproximadas para la localización del punto crítico, pérdida de masa y velocidad terminal con una discrepancia del 5% para la velocidad terminal y un 10% para la pérdida de masa.

2.3. Tipos de soluciones

En la última década, Curé (2004) y Curé et al. (2011) encontraron dos nuevas soluciones físicas de la ecuación diferencial no-lineal de la hidrodinámica m-CAK que describe el perfil de velocidad y la pérdida de masa de estrellas con alta rotación (solución lenta Ω) y de estrellas de tipo tardío B y A supergigantes (solución lenta δ). Tres tipos de soluciones son conocidas actualmente para los vientos impulsados por radiación. La solución estándar m-CAK (solución rápida), caracterizada por un crecimiento exponencial en la base del viento que empalma rápidamente a un perfil β (ver 2.3.1) cuando las velocidades alcanzan algunos kilómetros por segundo.

En toda esta tesis, cuando se refiere a la solución numérica, se está mencionando a la solución obtenida a través de un código que utiliza la hidrodinámica del viento (Curé 2004).

2.3.1. Solución rápida

A la solución estándar del modelo m-CAK se le denomina *solución rápida* (Friend & Abbott 1986; Pauldrach et al. 1986), ésta ha tenido éxito en describir las velocidades terminales y pérdidas de masa de estrellas muy masivas, normalmente estrellas de tipo O (figura 2.7).

La solución rápida normalmente se ajusta por medio de un perfil de velocidad tipo β ,

$$v(r) = v_{\infty} (1 - R_*/r)^{\beta}. \quad (2.64)$$

Típicamente el valor de β para este tipo de soluciones varía entre 0,8 y 1,0.

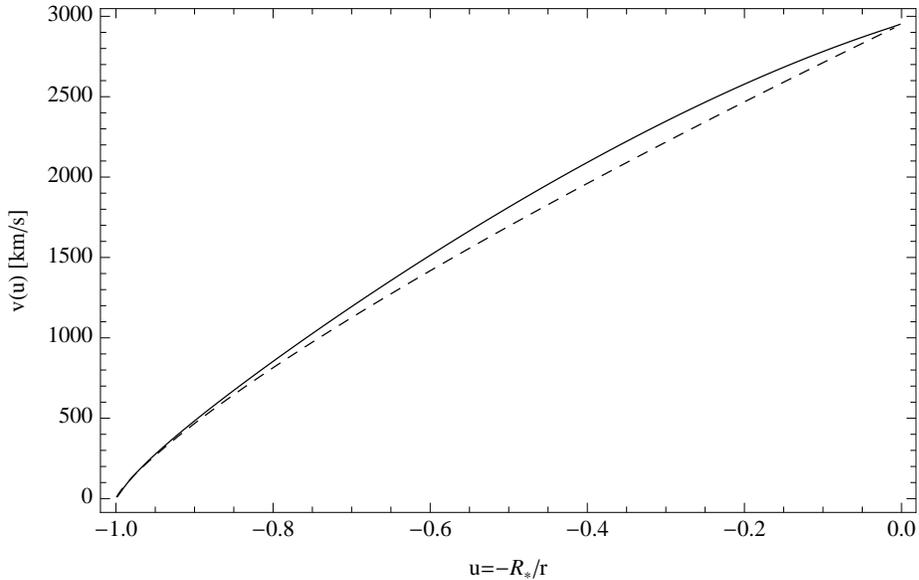


Figura 2.7: Comparación entre la solución numérica (línea sólida) y un perfil β (línea a trazos) para una estrella de tipo O con $v_{\infty} = 2950 \text{ km/s}$ y $\beta = 0,8$ (Martins et al. 2005).

2.3.2. Solución lenta Ω

Curé (2004) re-examinó la teoría de los vientos impulsados por radiación incluyendo la rotación estelar. Él obtuvo una fórmula exacta para la posición de los puntos críticos (singulares) y para la pérdida de masa. Mostró que existe otra familia de puntos singulares, localizados lejos de la superficie estelar, además de la familia de soluciones estándar conocidas para m-CAK (*solución rápida*), cuando la rotación de la estrella es cercana a la velocidad de rotación crítica (v_{crit}), esto es, $\Omega = v/v_{crit} \gtrsim 60\% - 70\%$. Las soluciones numéricas cruzando a través de estas otras familias de puntos críticos lleva a los vientos a velocidades terminales menores ($1/3$) y densidades mayores (~ 30 veces mayores) que los vientos de estrellas sin (o baja) rotación (*solución rápida*). Esta solución es llamada *solución lenta Ω* (de aquí en adelante, *solución $L\Omega$*). También encontró que para estrellas B tardías, estas soluciones se representan bien con un perfil β de velocidades, con $\beta > 1$.

Estas soluciones $L\Omega$ podrían predecir la formación de un disco circumestelar alrededor de estrellas con alta rotación. Curé et al. (2005) modelaron la distribución de densidad de una supergigante $B[e]$ con alta rotación, considerando un cambio en los parámetros del multiplicador de fuerza (k , α y δ) debido al salto de bi-estabilidad (Lamers & Pauldrach 1991). Este modelo arrojó vientos de gran velocidad en la región polar en comparación con la ecuatorial, con un contraste de densidad cercano a los $10^2 - 10^4$ cerca de la superficie estelar y $10^1 - 10^2$ a $100 R_*$.

2.3.3. Solución lenta δ

Basados en la existencia de una solución lenta para estrellas con alta rotación (*solución $L\Omega$*), Curé et al. (2011) exploran numéricamente el espacio de parámetros de los vientos impulsados por radiación para buscar nuevas soluciones en estrellas con baja rotación que podrían explicar las discrepancias entre los valores predichos (\dot{M} y v_∞) usando una solución rápida y los valores observados para estrellas supergigantes de tipo BA. Encontraron que para un particular conjunto de parámetros estelares y del viento aparecía una nueva solución (figura 2.8), a la que denominaremos *solución lenta δ* (de aquí en adelante, *solución $L\delta$*).

Para estrellas de tipo tardío B y A supergigantes con baja rotación, la solución $L\delta$ se encuentra cuando el parámetro δ (parámetro del multiplicador de fuerza) es ligeramente mayor que $\sim 0,25$. Altos valores de δ son esperados en ambientes

ricos de hidrógeno, por ejemplo, para un gas de hidrógeno puro Puls et al. (2000) demostraron que δ es $\sim 0,33$. Esta solución, donde δ representa el cambio en la ionización del viento con la distancia, alcanza bajas velocidades terminales similares a la solución $L\Omega$, pero con una pérdida de masa mucho menor.

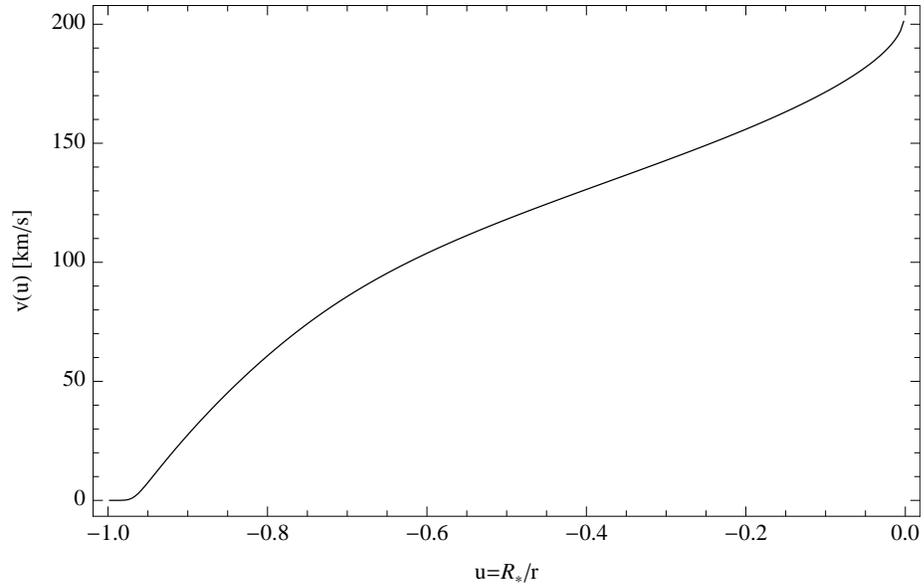


Figura 2.8: Perfil de velocidades de una solución numérica $L\delta$. Modelo W03 (ver Curé et al. 2011), con $T_{eff} = 10000$, $\log g = 2$, $R_*/R_\odot = 60$, $k = 0,37$, $\alpha = 0,49$ y $\delta = 0,30$.

Capítulo 3

Soluciones Analíticas: Soluciones Rápidas

En este capítulo se mostrará y discutirá las metodologías propuestas por Villata (1992) y Müller & Vink (2008) para encontrar una solución al modelo m-CAK. Las soluciones que ellos encuentran se ajustan bien a las del tipo rápidas, pero en el siguiente capítulo discutiremos porqué estas metodologías no son adecuadas para el caso de una solución $L\delta$. La importancia de estas soluciones es que son analíticas, lo que facilita su cálculo, aunque en el trabajo de Villata, él solo la resolvió numéricamente. Ahora se sabe que existe una solución analítica por medio de la función W de Lambert (ver apéndice B), al igual como lo aplica Müller & Vink (MV) en su trabajo.

3.1. Villata (1992)

En el marco de trabajo de los vientos impulsados por radiación (m-CAK), Villata (1992) desarrolló un modelo simplificado de esta teoría. Logró obtener una aceleración aproximada de las líneas derivada del modelo clásico m-CAK y basado en el estudio analítico de Kudritzki et al. (1989). Esta aproximación permite una notable simplificación de la ecuación de movimiento.

A continuación se detallará el trabajo llevado a cabo por Villata.

3.1.1. Aproximación de la aceleración de la línea

Villata siguió el estudio analítico realizado por (Kudritzki et al. 1989, KPPA) para el caso de una fotosfera delgada, esto es, $a^2/v_{esc}^2 \ll 1$ y $r_c \approx R$, donde a es la velocidad isotérmica del sonido y

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2G M_*(1 - \Gamma)}{R}}, \quad (3.1)$$

es la velocidad de escape, reducida debido a la dispersión de Thomson, además r_c es la coordenada radial y el subíndice c significa el punto crítico.

Se utilizan las mismas suposiciones que se consideraron para el modelo m-CAK (sin rotación, campos magnéticos y sin viscosidad).

Introduciendo coordenada radial adimensional $\hat{r} = r/R$, el factor de corrección de disco finito (ecuación 2.62) se puede escribir como:

$$FC = \frac{1}{1 + \alpha} \frac{\hat{r}^2}{1 - h} \left[1 - \left(1 - \frac{1 - h}{\hat{r}^2} \right)^{1 + \alpha} \right], \quad (3.2)$$

donde

$$h = \left(\frac{d \ln v}{d \ln \hat{r}} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Utilizando la constante C (ecuación 2.48) y la ecuación de conservación de flujo de masa \dot{M} (ecuación 2.39), la aceleración de las líneas puede escribirse como:

$$g_L = \frac{C f}{R^2 \hat{r}^2} y^\alpha \quad (3.4)$$

donde f e y están definidos por:

$$f = FC \left(\frac{n_e}{W(r)} \right)^\delta \quad (3.5)$$

e

$$y = r^2 v \frac{dv}{dr} = R \hat{r}^2 v \frac{dv}{d\hat{r}}. \quad (3.6)$$

El propósito es reescribir la ecuación 3.4 como una función de \hat{r} únicamente, eliminando la dependencia con la velocidad. Luego, utilizando un perfil β ,

$$v(\hat{r}) = v_\infty \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^\beta, \quad (3.7)$$

β puede ajustarse utilizando la fórmula dada por (Kudritzki et al. 1987, KPP):

$$\beta = 0,95\alpha + \frac{0,008}{\delta} + \frac{0,032v_{esc}}{500 \text{ km s}^{-1}}. \quad (3.8)$$

Entonces la ecuación 3.3 puede ser escrita de la siguiente manera,

$$h(\hat{r}, \beta) = \frac{\hat{r} - 1}{\beta} \quad (3.9)$$

y consecuentemente FC pasa a ser una función de \hat{r} , α y β . Análogamente, podemos escribir (KPPA):

$$\left(\frac{n_E}{W}\right)^\delta = \Delta \left\{ \hat{r}^2 \left[\frac{v_1}{v_\infty - v_1} + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^\beta \right] \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\hat{r}^2}\right)^{1/2} \right] \right\}^{-\delta}, \quad (3.10)$$

donde Δ es una constante que depende de los parámetros estelares. La dependencia de g_L en v y $dv/d\hat{r}$ es ahora sólo en y .

De la ecuación de estado de un gas ideal (ver sección 2.2.2),

$$p = a^2 \rho, \quad (3.11)$$

junto con las ecuaciones 3.1, 2.39, 3.4 y 3.6, se expresa la ecuación de movimiento como:

$$F(\hat{r}, y, v) \equiv Cf(\hat{r})y^\alpha - GM_*(1 - \Gamma) \left(1 - \frac{4a^2}{v_{esc}^2} \hat{r}\right) - y \left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right) = 0. \quad (3.12)$$

Con $\hat{r}_c \approx 1$ y $a^2/v^2 \ll 1$ para $\hat{r} \geq \hat{r}_c$ (ver KPPA) y la condición de singularidad (para encontrar el punto crítico)

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\hat{r}=\hat{r}_c} = 0 \quad (3.13)$$

se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y} [Cf(\hat{r})y^\alpha] |_{\hat{r}=1} = \frac{\partial}{\partial y} \left[G M_*(1 - \Gamma) \left(1 - \frac{4a^2}{v_{esc}^2} \hat{r} \right) + y \right] = 1, \quad (3.14)$$

esto es,

$$Cf(1)\alpha y^{\alpha-1}(1) = 1, \quad (3.15)$$

donde de la ecuación 3.12 (con $4a^2/v_{esc}^2 \ll 1$) es:

$$Cf(1)y^\alpha(1) = G M_*(1 - \Gamma) + y(1). \quad (3.16)$$

De la combinación de las ecuaciones 3.15 y 3.16 se obtiene:

$$C = \frac{1}{\alpha f(1)} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha} G M_*(1 - \Gamma) \right]^{1-\alpha}, \quad (3.17)$$

e

$$y(1) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} G M_*(1 - \Gamma). \quad (3.18)$$

KPPA también obtuvieron una estimación para $y(\hat{r})$ en $\hat{r} > \hat{r}_c$ de la ecuación de movimiento, determinando primero el valor de $y_p(\hat{r})$, donde la pendiente de $Cf(\hat{r})y^\alpha$ es igual a la unidad (ver ecuación 3.14), es decir:

$$\partial/\partial y [Cf(\hat{r})y^\alpha] = Cf(\hat{r})\alpha y_p^{\alpha-1} = 1, \quad (3.19)$$

Lo cual junto con la ecuación 3.17 se llega a:

$$y_p(\hat{r}) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} G M_*(1 - \Gamma) \left[\frac{f(\hat{r})}{f(1)} \right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (3.20)$$

Expandiendo Cfy^α hasta el segundo orden alrededor de y_p y sustituyendo esta expansión en la ecuación 3.12, junto con las ecuaciones 3.17 y 3.20, KPPA obtuvieron lo siguiente para $y(\hat{r})$:

$$y(\hat{r}) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} GM(1 - \Gamma)Z(\hat{r}), \quad (3.21)$$

donde

$$Z(\hat{r}) = f_N^{1/(1-\alpha)}(\hat{r}) \left\{ 1 + \left[\frac{2}{\alpha} \left(1 - f_N^{1/(\alpha-1)}(\hat{r}) \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (3.22)$$

y

$$f_N(\hat{r}) = \frac{f(\hat{r})}{f(1)}. \quad (3.23)$$

De las ecuaciones 3.5, 3.9 y 3.10,

$$\begin{aligned} f_N(x, \alpha, \beta, \delta) = & \frac{\beta \hat{r}^2}{1 + \beta - \hat{r}} \left[1 - \left(1 - \frac{1 + \beta - \hat{r}}{\beta \hat{r}^2} \right)^{1+\alpha} \right] \\ & \times \left\{ \hat{r}^2 \left[1 + \left(\frac{v_\infty}{v_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{\hat{r}} \right)^\beta \right] \times \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\hat{r}^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-\delta}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Insertado las ecuaciones 3.17 y 3.21 en la ecuación 3.4 se puede obtener $g_L(\hat{r})$ (KP-PA),

$$g_{LK}(\hat{r}) = \frac{G M_* (1 - \Gamma) f_N(\hat{r})}{R^2 \hat{r}^2} \frac{1}{1 - \alpha} Z^\alpha(\hat{r}) \quad (3.25)$$

Villata prefirió, en vez de utilizar esta última ecuación, buscar una función menos compleja y que se pueda integrar. Para hacer esto, se necesita una estimación para v_∞ . KPPA obtuvieron la siguiente aproximación para $v_{\infty K}$,

$$v_{\infty K}^2 \approx v_{esc}^2 \frac{\alpha}{1 - \alpha} I, \quad (3.26)$$

donde

$$I = \int_1^\infty \frac{Z(\hat{r})}{\hat{r}^2} d\hat{r} = \int_0^1 Z(u) du, \quad (3.27)$$

con $u = 1/\hat{r}$. Una buena aproximación para I (ver figura 3.1) es:

$$I \approx \lim_{\hat{r} \rightarrow \infty} Z(\hat{r}), \quad (3.28)$$

lo cual da un error del 2% – 3% para valores típicos de α , β y δ Abbott (1982).

Si se comparan los valores de v_∞ dados por la ecuación 3.26 (fijando $v_1/v_\infty = 0,05$)

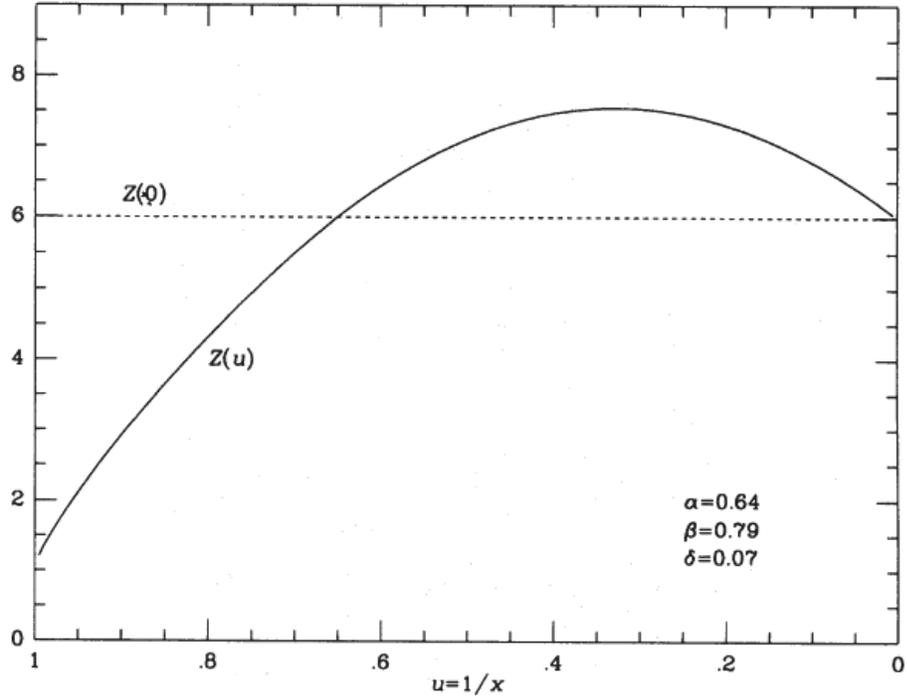


Figura 3.1: Comportamiento de la función $Z(u)$. Se observa que $\int_0^1 Z(u)du \approx Z(0)$. Imagen extraída de Villata (1992).

con resultados de tratamientos numéricos, se puede observar que la ecuación 3.26 sobrestima la velocidad terminal, concretamente

$$v_\infty^2 \approx 0,88v_{\infty K}^2. \quad (3.29)$$

Ahora se puede estimar $y(\hat{r})$ a partir de las ecuaciones 3.6, 3.7, 3.29, 3.26 y 2.63, obteniéndose:

$$y(\hat{r}) = G M_*(1 - \Gamma) \frac{1,76\alpha\beta I}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{2\beta-1}. \quad (3.30)$$

Insertando las ecuaciones 3.17 y 3.29 en la ecuacion 3.4, se obtiene

$$g_L(\hat{r}) = \frac{G M_*(1 - \Gamma)}{R^2\hat{r}^2} \frac{f_N(\hat{r})}{1 - \alpha} \left[1,76\beta I \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{2\beta-1}\right]^\alpha. \quad (3.31)$$

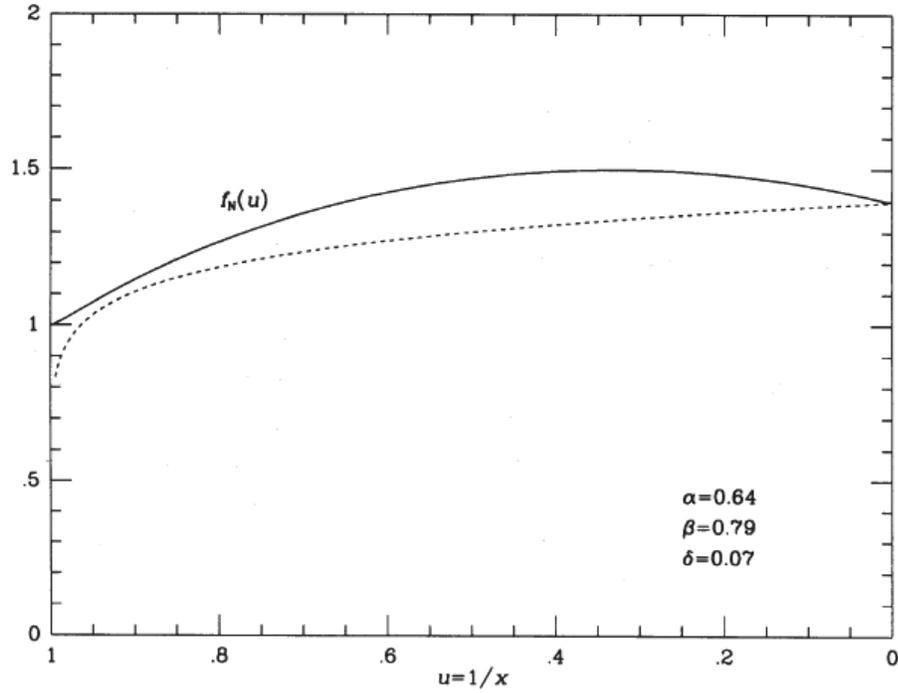


Figura 3.2: Función $f_N(u)$ (línea sólida) comparada con la aproximación de la ecuación 3.32 (línea a trazos). Imagen extraída de Villata (1992).

Considerando que (ver figura 3.2),

$$f_N(\hat{r}) \approx \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{0,2\alpha\beta} \lim_{\hat{r} \rightarrow \infty} f_N(\hat{r}) = (1 + \alpha) \left(2 \frac{v_1}{v_\infty}\right)^\delta \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{0,2\alpha\beta} \text{ para } \hat{r} > 1 \quad (3.32)$$

y usando la aproximación dada por la ecuación 3.28 para I , se obtiene la forma final de la aceleración $g_L(\hat{r})$ de la línea simplificada

$$g_L(\hat{r}) = \frac{G M_* (1 - \Gamma)}{R^2 \hat{r}^2} A(\alpha, \beta, \delta) \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{\alpha(2,2\beta-1)}, \quad (3.33)$$

donde

$$A(\alpha, \beta, \delta) = \frac{(1,76\beta)^\alpha}{1-\alpha} [10^{-\delta}(1+\alpha)]^{1/(1-\alpha)} \left[1 + \left(\frac{2}{\alpha} \left\{ 1 - [10^{-\delta}(1+\alpha)]^{1/(\alpha-1)} \right\} \right)^{1/2} \right]^\alpha. \quad (3.34)$$

Finalmente Villata logra obtener una aproximación para la aceleración de las líneas g_L , la cual es exclusivamente dependiente de \hat{r} .

3.1.2. Ecuación de movimiento adimensional

Una vez obtenida la aceleración simplificada de las líneas, Villata pudo reemplazarla en la ecuación 2.63 e integrarla por métodos numéricos, en donde las velocidades terminales concordaban dentro de un 3% – 4% con las calculadas por PPK y KPP (ver tabla 1 de Villata 1992). En cambio, en este trabajo se usará el g_L simplificado y se resolverá la ecuación de movimiento analíticamente basándose en la función W de Lambert y en la metodología de MV (ver sección 3.2).

Para encontrar una solución analítica primero se debe reescribir la ecuación de movimiento en forma adimensional. Para ello, se comienza con la ecuación de continuidad 2.39, la cual se puede reordenar como:

$$\rho(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v(r)} = \frac{F}{\hat{r}^2 v(\hat{r})}, \quad (3.35)$$

donde $F = \dot{M}/4\pi R_*^2$ es el flujo a través de la superficie de la estrella de radio R_* .

Además, se puede escribir la ecuación de momentum en forma adimensional,

$$\hat{v} \frac{d\hat{v}}{d\hat{r}} = -\frac{\hat{v}^2}{\hat{r}^2} + \hat{g}_L - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\hat{r}}. \quad (3.36)$$

Las velocidades adimensionales están en unidades de la velocidad isotérmica del sonido a .

$$\hat{v} = \frac{v}{a}, \quad \hat{v}_{crit} = \frac{v_{esc}}{a\sqrt{2}} \quad (3.37)$$

y la aceleración adimensional de las líneas:

$$\hat{g}_L = \frac{R_*}{a^2} g_L. \quad (3.38)$$

Utilizando la ecuación 3.35 se obtiene:

$$\frac{d\rho}{d\hat{r}} = \left(-\frac{2}{\hat{r}^3} \frac{1}{v(\hat{r})} - \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{1}{v(\hat{r})^2} \frac{dv(\hat{r})}{d\hat{r}} \right) F, \quad (3.39)$$

reordenando

$$\frac{d\rho}{d\hat{r}} = -\rho(\hat{r}) \left(\frac{2}{\hat{r}} + \frac{1}{v(\hat{r})} \frac{dv(\hat{r})}{d\hat{r}} \right). \quad (3.40)$$

Usando esta expresión para $d\rho/d\hat{r}$ en la ecuación 3.36, se encuentra la ecuación diferencial adimensional, de movimiento que ahora es independiente de ρ ,

$$\left(\hat{v} - \frac{1}{\hat{v}} \right) \frac{d\hat{v}}{d\hat{r}} = -\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \hat{g}_L \quad (3.41)$$

Si incluimos el término g_L obtenido por Villata, la ecuación queda como:

$$\left(\hat{v} - \frac{1}{\hat{v}} \right) \frac{d\hat{v}}{d\hat{r}} = -\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \frac{R_* G M_* (1 - \Gamma)}{a^2 R^2 \hat{r}^2} A(\alpha, \beta, \delta) \left(1 - \frac{1}{\hat{r}} \right)^{\alpha(2, 2\beta - 1)} \quad (3.42)$$

3.1.3. Puntos críticos

El lado izquierdo de la ecuación 3.42 desaparece para un radio crítico \hat{r}_c , en donde:

$$\hat{v}(\hat{r}_c) \equiv \hat{v}(\hat{r}_s) = 1. \quad (3.43)$$

Esto significa que la velocidad del punto crítico es igual a la rapidez isotérmica del sonido, $\hat{v} = 1$, y el radio crítico es el radio sónico,

$$\hat{r}_c \equiv \hat{r}_s. \quad (3.44)$$

La ubicación del punto crítico se obtiene resolviendo \hat{r} de la ecuación 3.42,

$$-\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \frac{R_* G M_* (1 - \Gamma)}{a^2 R^2 \hat{r}^2} A(\alpha, \beta, \delta) \left(1 - \frac{1}{\hat{r}} \right)^{\alpha(2, 2\beta - 1)} = 0 \quad (3.45)$$

El radio crítico debe ser determinado numéricamente.

3.1.4. Resolviendo la ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento 3.42 puede ser resuelta integrando ambos lados, obteniendo:

$$\hat{v}^2 - \ln \hat{v}^2 = 2 \frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} + 4 \ln \hat{r} + 2 \int \hat{g}_L(\hat{r}) d\hat{r} + C, \quad (3.46)$$

donde

$$\begin{aligned} \int \hat{g}_L(\hat{r}) d\hat{r} \equiv I_{g_L}(\hat{r}) &= (10^{-\delta}(1 + \alpha))^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(1 + \sqrt{2} \sqrt{-\frac{(10^{-\delta}(1 + \alpha) - 1)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\alpha}} \right)^\alpha \\ &\times (1,76\beta)^\alpha G M_* \left(\frac{\hat{r} - 1}{\hat{r}} \right)^{1+\alpha(\beta 2,2-1)} (\Gamma - 1) \\ &\times \frac{1}{(a^2[\alpha - 1](1 + \alpha(2,2\beta - 1))R_*)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

El lado derecho de la ecuación 3.46 se puede denotar como una función:

$$f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = 2 \frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} + 4 \ln \hat{r} + 2I_{g_L}(\hat{r}) + D(\hat{r}', \hat{v}'). \quad (3.48)$$

La constante de integración D es determinada por la condición de contorno de la velocidad radial \hat{v}' a un radio dado \hat{r}' . De la ecuación 3.46 se puede determinar $D(\hat{r}', \hat{v}')$ para la solución que pasa a través de un punto en particular (\hat{r}', \hat{v}') , normalmente el punto sónico:

$$D(\hat{r}', \hat{v}') = \hat{v}'^2 - \ln \hat{v}'^2 - 2 \frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}'} - 4 \ln \hat{r}' - I_{g_L}(\hat{r}'). \quad (3.49)$$

Por lo tanto la función f de la ecuación 3.48 se puede expresar como:

$$f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = \hat{v}'^2 - \ln \hat{v}'^2 + 2 \frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}'} \right) + 4 \ln \frac{\hat{r}}{\hat{r}'} + 2 (I_{g_L}(\hat{r}) - I_{g_L}(\hat{r}')). \quad (3.50)$$

Utilizando esto último, la ecuación 3.46 puede escribirse simplificada como:

$$\hat{v}^2 - \ln \hat{v}^2 = f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}'), \quad (3.51)$$

o equivalentemente:

$$-\hat{v}^2 e^{-\hat{v}^2} = -e^{-f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}')}. \quad (3.52)$$

La cual puede ser resuelta analíticamente en términos de la función W.

3.1.5. Solución de la ecuación de movimiento

Ahora es posible dar una expresión analítica para la solución \hat{v} de la ecuación de movimiento 3.42 por medio de la función W. Por lo tanto la solución general de la ecuación de movimiento que pasa a través del punto (\hat{r}', \hat{v}') es:

$$\hat{v} = \sqrt{-W_k(x)}, \quad (3.53)$$

cuyo argumento de la función W es:

$$x(\hat{r}) = -e^{-f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}')}. \quad (3.54)$$

Insertando $f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}')$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$x(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}'} \right)^4 \hat{v}'^2 \exp \left(-2\hat{v}'_{crit}^2 \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}'} \right) - 2(I_{gL}(\hat{r}) - I_{gL}(\hat{r}')) - \hat{v}'^2 \right). \quad (3.55)$$

Entonces utilizando $\hat{r}' = \hat{r}_c \equiv \hat{r}_s$ y $\hat{v}' = \hat{v}_c \equiv 1$ la solución analítica queda como:

$$\hat{v}(\hat{r}) = \pm \sqrt{-W_k(x(\hat{r}))}, \quad (3.56)$$

con

$$x(\hat{r}) = - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}_s} \right)^4 \exp \left(-2\hat{v}_{crit}^2 \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}_s} \right) - 2(I_{gL}(\hat{r}) - I_{gL}(\hat{r}_s)) - 1 \right). \quad (3.57)$$

La rama de la función W_k dependerá del valor de \hat{r} ,

$$k = \begin{cases} 0 & \text{para } 1 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_c \\ -1 & \text{para } \hat{r} > \hat{r}_c \end{cases} \quad (3.58)$$

A modo de ejemplo se calcularon las soluciones analíticas de dos estrellas diferentes. Una solución, en comparación con la solución numérica, se muestra en la figura 3.3 para la estrella εOri con $T_{eff} = 28500$, $\log g = 3,25$, $R_*/R_\odot = 37$, $k = 0,170$, $\alpha = 0,590$ y $\delta = 0,090$ (Villata 1992). La figura 3.6 corresponde al perfil de velocidades de una estrella tipo O con $T_{eff} = 40000$, $\log g = 5,5$, $R_*/R_\odot = 11,757$ (Martins et al. 2005), $k = 0,127$, $\alpha = 0,640$ y $\delta = 0,070$ (PPK). En las figuras 3.4, 3.7 y 3.5, 3.8 se grafican las diferencias de velocidades en km/s y el error porcentual, respectivamente. Se puede apreciar que en la base del viento el error es considerable, lo que podría atribuirse como una mala aproximación del perfil β (que es en lo que se basó Villata) para la solución numérica, que es una consecuencia de usar la aproximación de Sobolev.

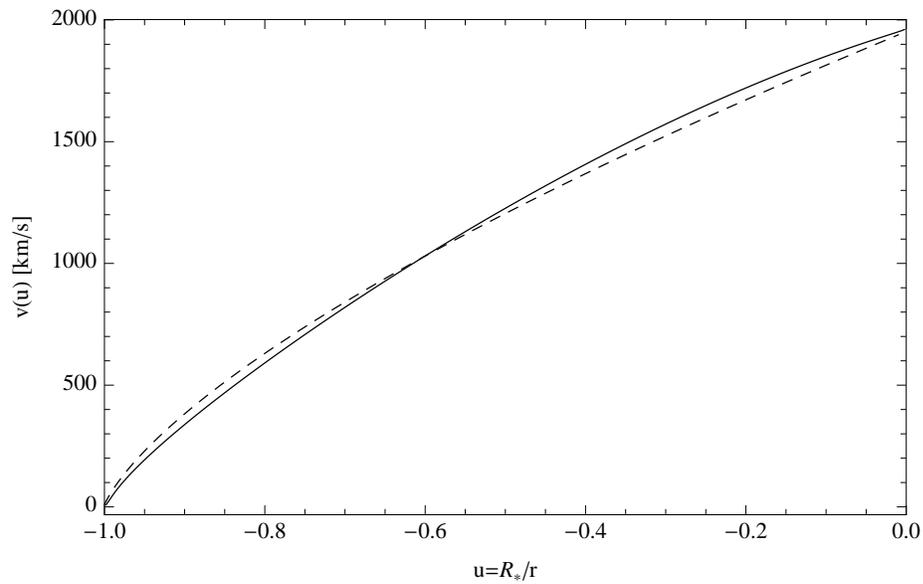


Figura 3.3: Perfil de velocidad de la solución analítica (línea a trazos) comparado con el de la solución numérica (línea sólida) para εOri .

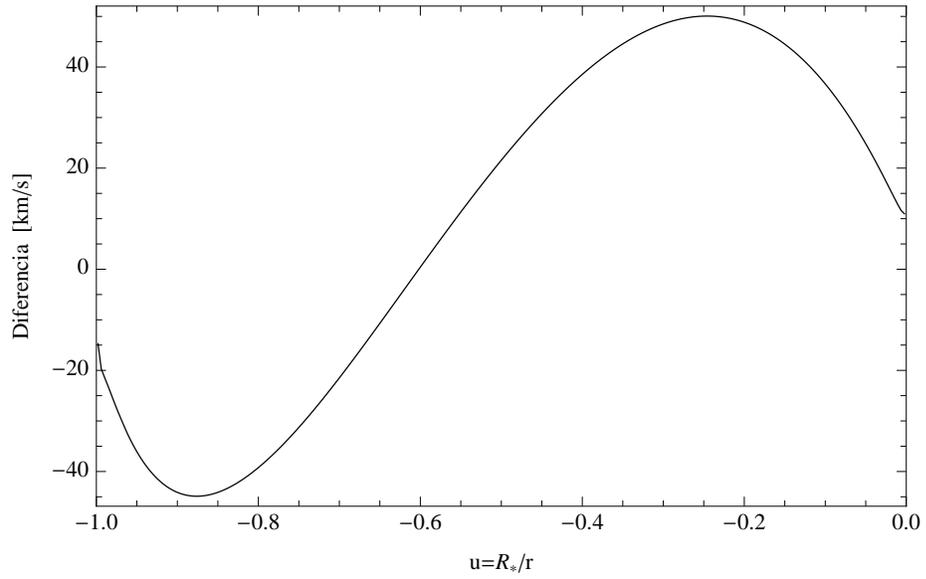


Figura 3.4: Diferencia en velocidades en km/s entre la solución analítica y la numérica para εOri .

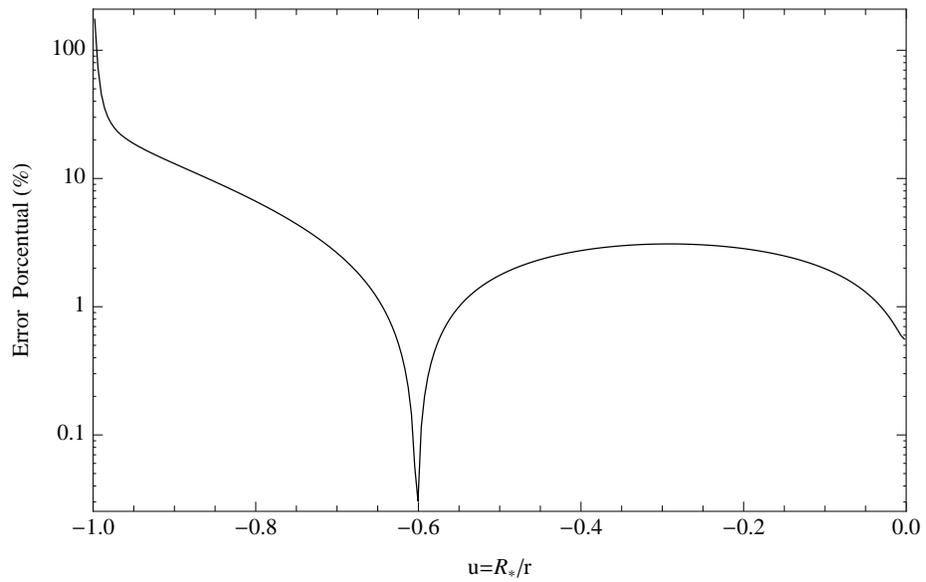


Figura 3.5: Error porcentual en escala logarítmica, entre la solución analítica y la numérica para εOri .

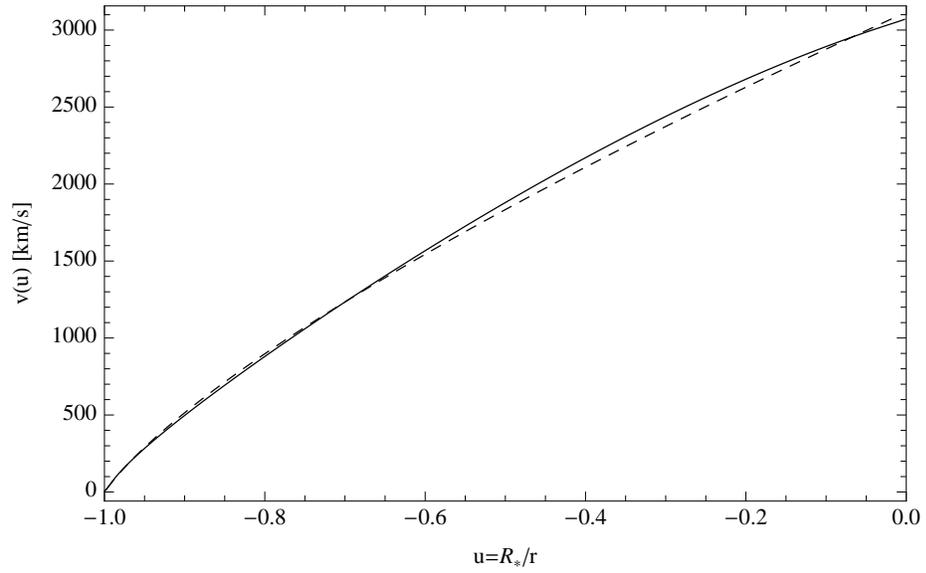


Figura 3.6: Perfil de velocidad de la solución analítica (línea a trazos) comparado con el de la solución numérica (línea sólida) para una estrella tipo O.

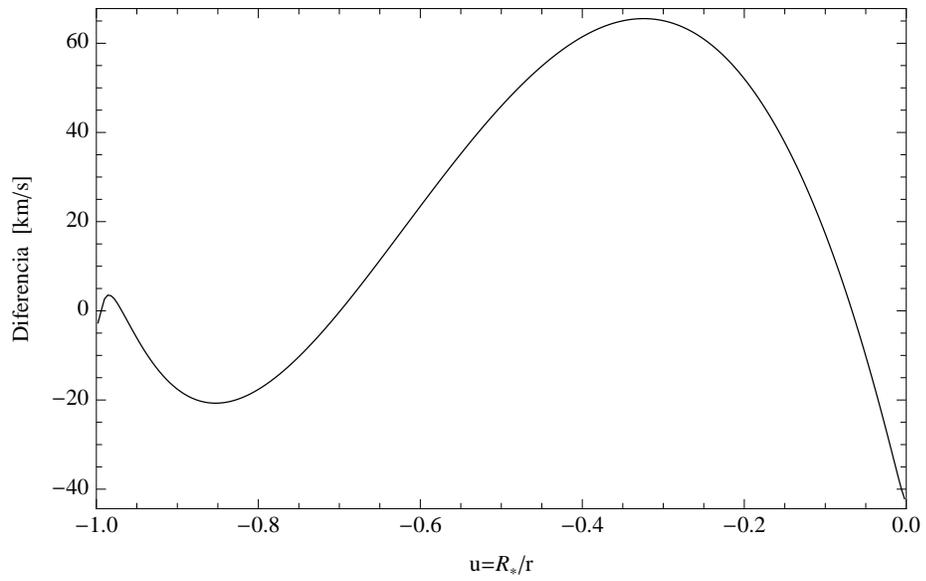


Figura 3.7: Diferencia en velocidades en km/s entre la solución analítica y la numérica para una estrella tipo O.

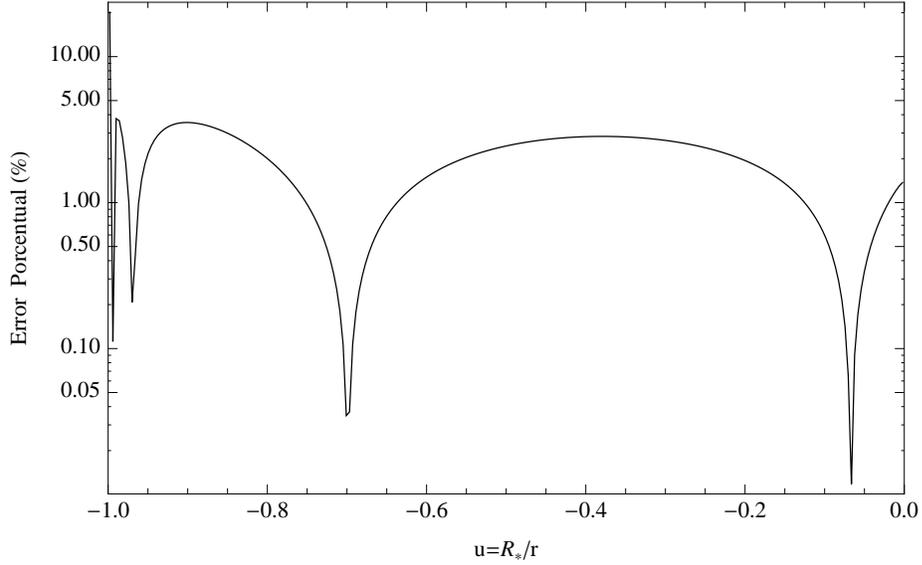


Figura 3.8: Error porcentual en escala logarítmica, entre la solución analítica y la numérica para una estrella tipo O.

3.2. Müller & Vink (2008)

Como se menciona anteriormente, se usó la metodología de MV para resolver de forma analítica la ecuación de movimiento con el término de \hat{g}_L obtenido por Villata. Ahora se describirá la misma metodología pero como originalmente MV lo plantearon en su trabajo.

3.2.1. El término de la aceleración de las líneas

A partir de la ecuación de movimiento adimensional (ecuación 3.41) MV obtuvieron \hat{g}_L del ajuste de un modelo no-lineal, el cual dependía exclusivamente del radio.

Para derivar una expresión matemática para \hat{g}_L como una función exclusivamente dependiente del radio \hat{r} , MV describieron las propiedades matemáticas que cumplían la física de la función \hat{g}_L :

1. Por razones hidrostáticas, \hat{g}_L debe ser cero en un radio particular $\hat{r}'(\approx 1)$ cerca

de la superficie de la fotósfera:

$$\hat{g}_L(\hat{r} = \hat{r}') = 0 \quad (3.59)$$

2. \hat{g}_L debe ser siempre positivo (excepto cerca de la superficie de la estrella, ver ítem 1) ya que el flujo de la radiación es hacia afuera, entonces la fuerza radiativa es:

$$\hat{g}_L(\hat{r}) > 0 \text{ para } \hat{r} > \hat{r}' \quad (3.60)$$

3. Se espera que \hat{g}_L decrezca como $1/\hat{r}^2$ con el incremento de la distancia radial \hat{r} :

$$\hat{g}_L(\hat{r}) \approx \frac{1}{\hat{r}^2} \longrightarrow 0 \text{ para } \hat{r} \longrightarrow \infty \quad (3.61)$$

4. \hat{g}_L tiene un máximo absoluto en algún lugar entre las superficie de la estrella y el límite exterior del viento debido a las propiedades descritas anteriormente:

$$0 \leq \hat{g}_L(\hat{r}) \leq \hat{g}_L(\hat{r}_{max}) \quad (3.62)$$

MV propusieron que todas estas propiedades matemáticas para la aceleración radiativa pueden expresarse por medio de la siguiente función:

$$\hat{g}_L(\hat{r}) = \frac{\hat{g}_0}{\hat{r}^{1+\delta}} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta} \right)^\gamma, \quad (3.63)$$

en donde \hat{g}_0 , δ , \hat{r}_0 y γ son los parámetros del ajuste. Esta función es independiente de \hat{v} y $d\hat{v}/d\hat{r}$ y exclusivamente dependiente de \hat{r} . En la figura 3.9 se muestra el ajuste para la estrella εOri , donde los parámetros del ajuste son: $\hat{g}_0 = 2,379$, $\delta = 1,099$, $\hat{r}_0 = 0,994$ y $\gamma = 0,499$.

Con esta nueva definición la ecuación de movimiento se expresa como:

$$\left(\hat{v} - \frac{1}{\hat{v}} \right) \frac{d\hat{v}}{d\hat{r}} = -\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \frac{\hat{g}_0}{\hat{r}^{1+\delta}} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta} \right)^\gamma \quad (3.64)$$

Esta ecuación se puede resolver analíticamente.

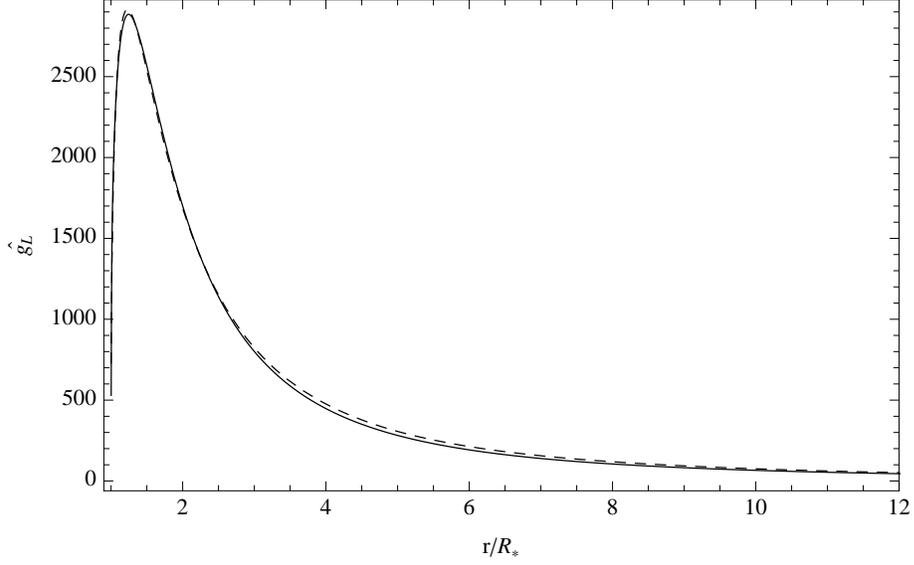


Figura 3.9: Ajuste de \hat{g}_L para la estrella εOri . La línea sólida corresponde al numérico y la línea a trazos al ajuste.

3.2.2. Solución de la ecuación de movimiento

Para resolver la ecuación de movimiento se debe realizar el mismo procedimiento que se realizó para Villata. Por lo tanto:

$$\hat{v}(\hat{r}_c) \equiv \hat{v}(\hat{r}_s) = 1, \quad (3.65)$$

y el radio crítico \hat{r}_c se obtiene al resolverlo de la siguiente ecuación:

$$-\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \frac{\hat{g}_0}{\hat{r}^{1+\delta}} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta}\right)^\gamma = 0. \quad (3.66)$$

Al integrar la ecuación de movimiento (3.64), obtenemos:

$$\hat{v}^2 - \ln \hat{v}^2 = 2\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} + 4 \ln \hat{r} + \frac{2}{\hat{r}_0} \frac{\hat{g}_0}{\delta(1+\gamma)} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta}\right)^{1+\gamma} + D. \quad (3.67)$$

El lado derecho de esta ecuación se denota como:

$$f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = 2\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} + 4 \ln \hat{r} + \frac{2}{\hat{r}_0} \frac{\hat{g}_0}{\delta(1+\gamma)} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta}\right)^{1+\gamma} + D(\hat{r}', \hat{v}'). \quad (3.68)$$

De la ecuación 3.67 se determina $D(\hat{r}', \hat{v}')$ para la solución que pasa a través de

un punto en particular (\hat{r}', \hat{v}') ,

$$D(\hat{r}', \hat{v}') = \hat{v}'^2 - \ln \hat{v}'^2 - 2 \frac{\hat{v}'_{crit}^2}{\hat{r}'} - 4 \ln \hat{r}' - \frac{2}{\hat{r}_0} \frac{\hat{g}_0}{\delta(1+\gamma)} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}'^\delta}\right)^{1+\gamma}. \quad (3.69)$$

La función f de la ecuación 3.68 se expresa como:

$$\begin{aligned} f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = & \hat{v}'^2 - \ln \hat{v}'^2 + 2\hat{v}'_{crit}^2 \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}'}\right) + 4 \ln \frac{\hat{r}}{\hat{r}'} \\ & + \frac{2}{\hat{r}_0} \frac{\hat{g}_0}{\delta(1+\gamma)} \left[\left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta}\right)^{1+\gamma} - \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}'^\delta}\right)^{1+\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

La ecuación 3.67 puede escribirse de la siguiente manera:

$$-\hat{v}^2 e^{-\hat{v}^2} = -e^{-f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}')} \quad (3.71)$$

Por lo tanto, la solución analítica de la ecuación de movimiento es (con $\hat{r}' = \hat{r}_c \equiv \hat{r}_s$ y $\hat{v}' = \hat{v}_c \equiv 1$),

$$\hat{v}(\hat{r}) = \sqrt{-W_k(x(\hat{r}))} \quad (3.72)$$

con

$$\begin{aligned} x(\hat{r}) = & - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}'}\right)^4 \exp \left[-2\hat{v}'_{crit}^2 \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}_s}\right) \right. \\ & \left. - \frac{2}{\hat{r}_0} \frac{\hat{g}_0}{\delta(1+\gamma)} \left[\left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta}\right)^{1+\gamma} - \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}_s^\delta}\right)^{1+\gamma} \right] - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Al igual que la solución encontrada para Villata, la rama de la función W dependerá del valor de \hat{r} .

Se calcularon las soluciones analíticas para las mismas dos estrellas usadas en la sección 3.1. Los perfiles de velocidad pueden observarse en las figuras 3.10 y 3.13, la diferencia en velocidades en figuras 3.11 y 3.14 y el error porcentual en 3.12 y 3.15.

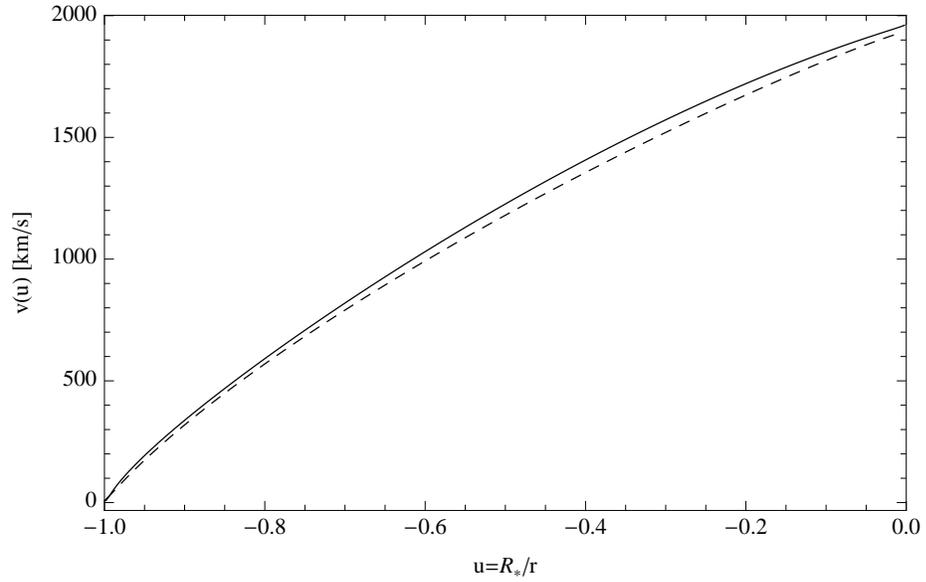


Figura 3.10: Perfil de velocidad de la solución analítica (línea a trazos) comparado con el de la solución numérica (línea sólida) para εOri .

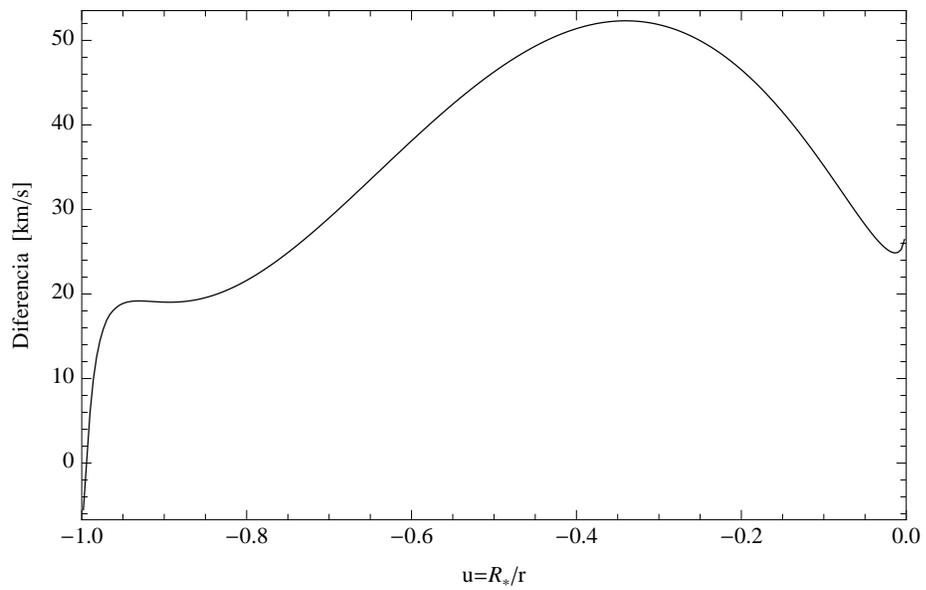


Figura 3.11: Diferencia en velocidades en km/s entre la solución analítica y la numérica para εOri .

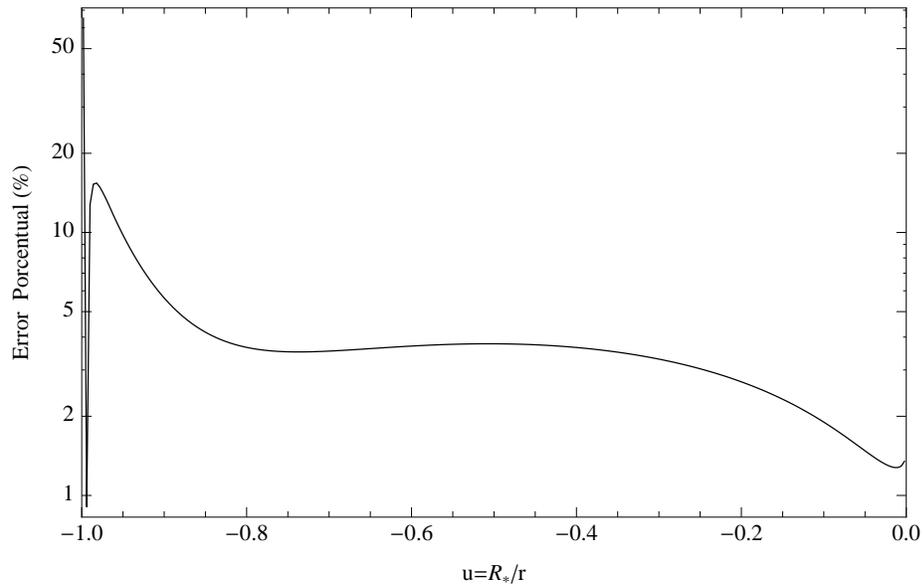


Figura 3.12: Error porcentual en escala logarítmica, entre la solución analítica y la numérica para ϵOri .

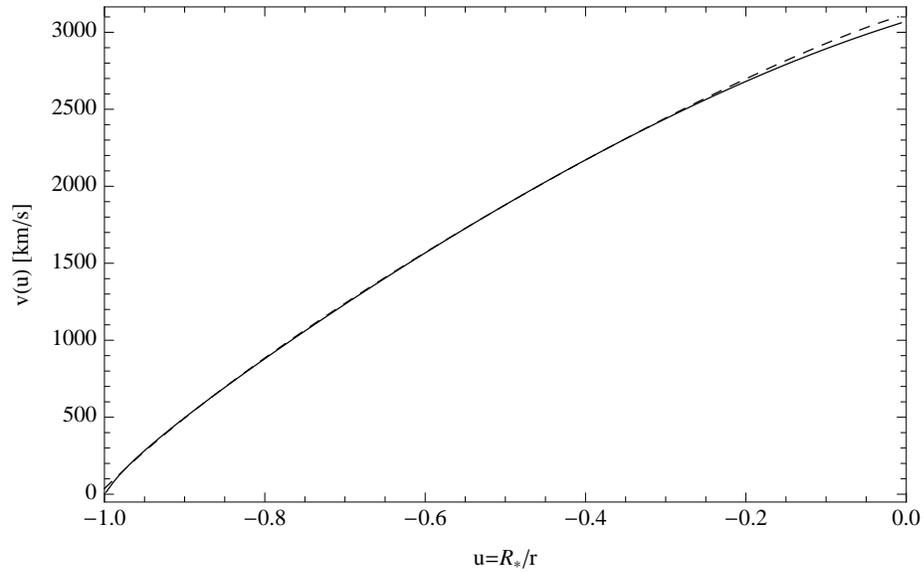


Figura 3.13: Perfil de velocidad de la solución analítica (línea a trazos) comparado con el de la solución numérica (línea sólida) para una estrella tipo O.

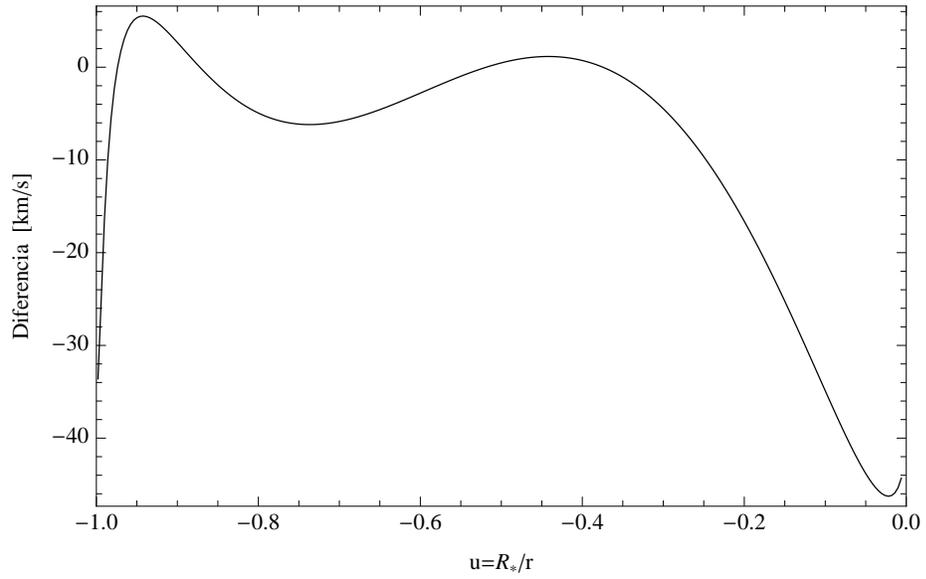


Figura 3.14: Diferencia en velocidades en km/s entre la solución analítica y la numérica para una estrella tipo O.

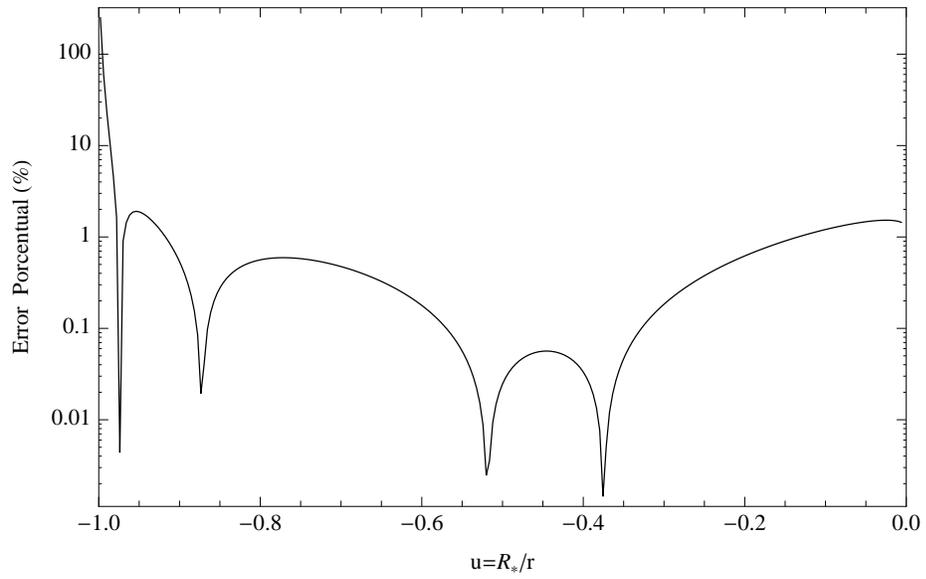


Figura 3.15: Error porcentual en escala logarítmica, entre la solución analítica y la numérica para una estrella tipo O.

3.3. Comparación entre soluciones analíticas

Como se vió en la sección anterior, en ambos casos (Villata y MV) se utilizó la misma metodología para resolver la ecuación de momentum en forma analítica, pero poseían una única diferencia, el término g_L . Al querer comparar estas soluciones, basándose en el error porcentual (figuras 3.5, 3.12 y 3.8, 3.15) con respecto a la solución numérica, se puede apreciar que la diferencia entre ellas no es significativa, por lo tanto, no es posible decidir cual es mejor. El error en la base del viento se presenta altos valores en ambas soluciones.

Si se compara el término \hat{g}_L definidos por MV con el de Villata, se puede apreciar que poseen la misma estructura:

$$\hat{g}_L(\hat{r})_{MV} = \frac{\hat{g}_0}{\hat{r}^{1+\delta}} \left(1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{r}^\delta}\right)^\gamma.$$

Si se define: $\hat{g}_0 = \frac{R_* G M_* (1-\Gamma)}{a^2 R^2} A(\alpha, \beta, \delta)$, $\delta = 1$, $\hat{r}_0 = 1$ y $\gamma = \alpha(2, 2\beta - 1)$. Se obtiene el \hat{g}_L definido por Villata,

$$\hat{g}_L(\hat{r})_{Villata} = \frac{R_* G M_* (1-\Gamma)}{a^2 R^2 \hat{r}^2} A(\alpha, \beta, \delta) \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right)^{\alpha(2, 2\beta - 1)}.$$

A partir de esto se podría decir que la aceleración de las líneas definida por Villata es una forma específica del término $\hat{g}_L(\hat{r})$ propuesto por MV. Por esta razón, las diferencias entre las soluciones son mínimas.

En términos prácticos, el g_L que obtiene Villata es más útil, debido a que es simplemente una función, que depende de los parámetros estelares y del viento, en cambio, el g_L de MV depende de los parámetros del ajuste y a su vez éstos *dependen de una solución numérica*. Esto último se podría solucionar si se supiera la dependencia de estos parámetros con los de la estrella.

Capítulo 4

Soluciones Analíticas: Soluciones Lentas δ

En este capítulo se mostrará que las soluciones analíticas desarrolladas anteriormente, para la solución rápida, no se ajustan bien a las soluciones numéricas $L\delta$. Se propone una nueva función g_L que entregue una solución analítica y tenga un mejor ajuste con las soluciones numéricas.

4.1. Soluciones analíticas rápidas versus lentas δ

4.1.1. g_L de Villata en soluciones lentas δ

Al tratar de obtener una solución lenta δ utilizando el g_L desarrollado por Villata se presenta un problema numérico, debido a que el término de la ecuación 3.34,

$$\left(\frac{2}{\alpha} \left\{ 1 - [10^{-\delta}(1 + \alpha)]^{1/(\alpha-1)} \right\} \right)^{1/2},$$

es más, se hace complejo al poseer un valor de δ alto ($\gtrsim 0,3$), propio de las soluciones $L\delta$. El que este término sea complejo hace imposible resolver la ecuación de movimiento con la metodología planteada.

4.1.2. g_L de MV en soluciones lentas δ

Utilizando el modelo no-lineal que ajusta g_L (ecuación 3.63), planteado por MV, se logra resolver la ecuación de movimiento, pero la solución obtenida posee un error muy grande en comparación con la solución numérica. Así lo muestran las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 de un caso con solución $L\delta$ para el modelo W03 (ver parámetros en sección 2.3.3), donde el error porcentual supera el 200% en $u = -0,9$. Por lo tanto, el modelo propuesto por MV no tiene la misma precisión para reproducir las soluciones $L\delta$, que como ocurre con las soluciones rápidas. Además, es importante mencionar que ningún perfil β ajusta bien a la solución $L\delta$ (figura 4.1).

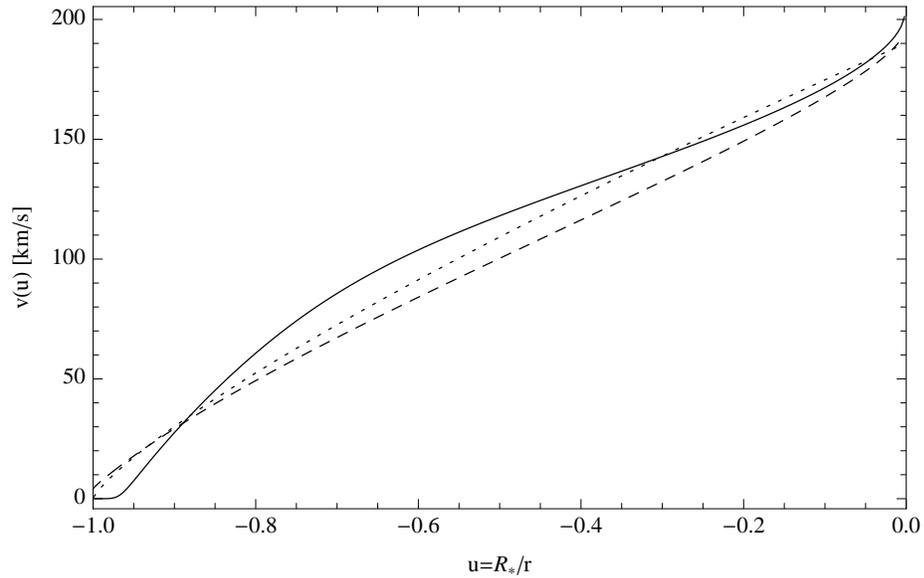


Figura 4.1: Perfil de velocidad de la solución analítica (línea a trazos) comparado con el de la solución numérica (línea sólida) y un perfil $\beta = 0,8$ (línea punteada) para W03.

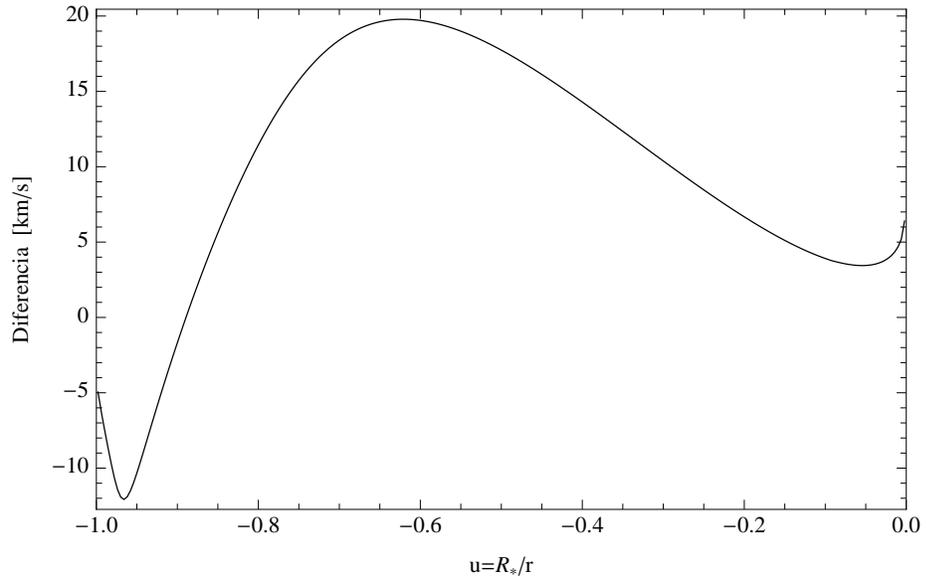


Figura 4.2: Diferencia en velocidades en km/s entre la solución analítica y la numérica para W03.

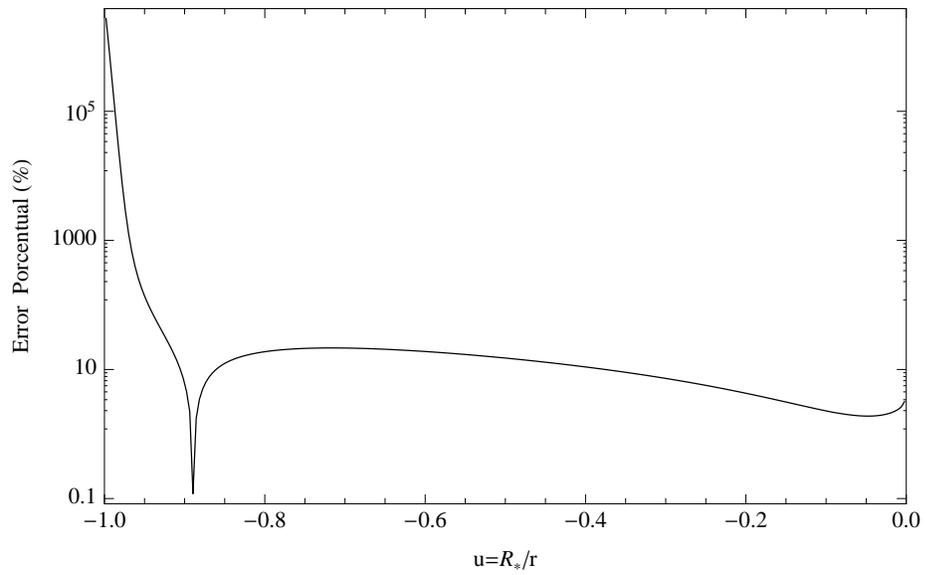


Figura 4.3: Error porcentual en escala logarítmica, entre la solución analítica y la numérica para W03.

4.2. MV modificado para soluciones lentas δ

Como se describió en la sección previa, al tratar de obtener una solución analítica para las soluciones $L\delta$, utilizando ya sea la expresión para g_L encontrada por Villata o por MV, estas se apartaban demasiado de la solución numérica, es decir, las soluciones no fueron satisfactorias. A raíz de esto, se propone un nuevo modelo, que como veremos, ajustará de buena forma el g_L obtenido numéricamente.

El modelo no-lineal propuesto para \hat{g}_L es el siguiente:

$$\hat{g}_L(\hat{r}) = \frac{g_0}{\hat{r}^{1+\delta_1}} \left(1 - \frac{1}{\hat{r}^{\delta_2}}\right)^\gamma, \quad (4.1)$$

donde g_0 , δ_1 , δ_2 y γ son los parámetros del ajuste. Este nuevo modelo cumple con las mismas propiedades matemáticas que posee el modelo (ecuación 3.63) propuesto por MV. En la figura se puede observar que este modelo se ajusta mejor que el modelo propuesto por MV para la misma estrella W03.

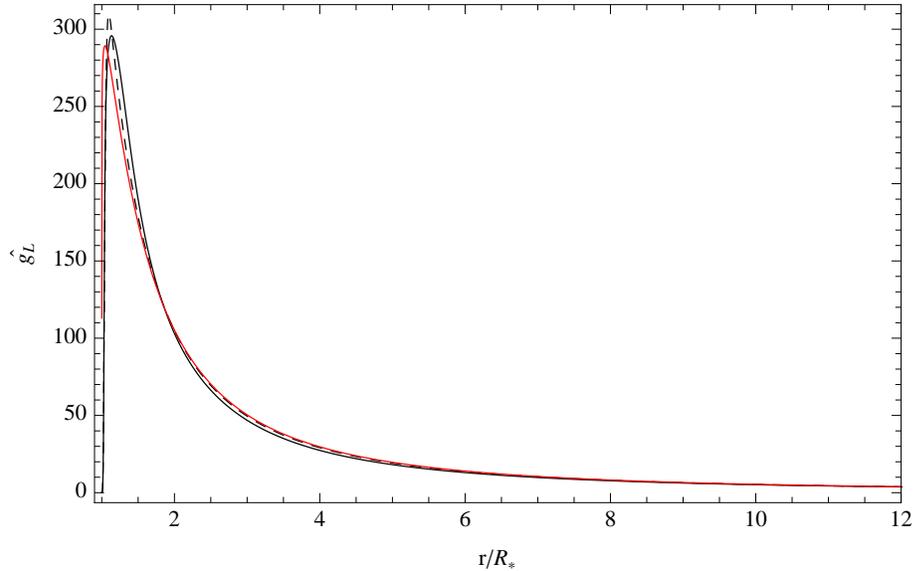


Figura 4.4: Ajuste de \hat{g}_L para la estrella W03. La línea sólida corresponde al numérico, la línea a trazos al ajuste usando el nuevo modelo y la línea roja es el ajuste del modelo planteado por MV.

Con esta nueva función es posible obtener una solución analítica para las soluciones $L\delta$. La ecuación de movimiento se puede escribir como,

$$\left(\hat{v} - \frac{1}{\hat{v}}\right) \frac{d\hat{v}}{d\hat{r}} = -\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \frac{g_0}{\hat{r}^{1+\delta_1}} \left(1 - \frac{1}{\hat{r}^{\delta_2}}\right)^\gamma \quad (4.2)$$

y la ecuación para el punto crítico, \hat{r}_c :

$$-\frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} + \frac{g_0}{\hat{r}^{1+\delta_1}} \left(1 - \frac{1}{\hat{r}^{\delta_2}}\right)^\gamma = 0. \quad (4.3)$$

Integrando la ecuación 4.2 (ver sección 3.1.4), se obtiene:

$$\hat{v}^2 - \ln \hat{v}^2 = 2 \frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} + 4 \ln \hat{r} + 2 \int \hat{g}_L(\hat{r}) d\hat{r} + D, \quad (4.4)$$

donde

$$\int \hat{g}_L(\hat{r}) d\hat{r} \equiv I_{g_L}(\hat{r}) = -\frac{g_0 \hat{r}^{-\delta_1} {}_2F_1 \left[-\gamma, \frac{\delta_1}{\delta_2}, 1 + \frac{\delta_1}{\delta_2}, \hat{r}^{-\delta_2} \right]}{\delta_1} \quad (4.5)$$

y ${}_2F_1$ es la función Hipergeométrica de Gauss. El lado derecho de la ecuación 4.4 se denota como:

$$f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = 2 \frac{\hat{v}_{crit}^2}{\hat{r}} + 4 \ln \hat{r} + 2 I_{g_L}(\hat{r}) + D(\hat{r}', \hat{v}'). \quad (4.6)$$

De la ecuación 4.4 se puede determinar $D(\hat{r}', \hat{v}')$. Por lo tanto la función f de la ecuación 4.6 se expresa como:

$$f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}') = \hat{v}'^2 - \ln \hat{v}'^2 + 2 \hat{v}_{crit}^2 \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}'} \right) + 4 \ln \frac{\hat{r}}{\hat{r}'} + 2 (I_{g_L}(\hat{r}) - I_{g_L}(\hat{r}')). \quad (4.7)$$

Utilizando esto último, la ecuación 4.4 puede escribirse como:

$$-\hat{v}^2 e^{-\hat{v}^2} = -e^{-f(\hat{r}; \hat{r}', \hat{v}')}. \quad (4.8)$$

La solución analítica en términos de la función W es:

$$\hat{v}(\hat{r}) = \sqrt{-W_k(x(\hat{r}))}, \quad (4.9)$$

donde $\hat{r}' = \hat{r}_c \equiv \hat{r}_s$ y $\hat{v}' = \hat{v}_c \equiv 1$ y

$$x(\hat{r}) = - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{r}'} \right)^4 \exp \left(-2 \hat{v}_{crit}^2 \left(\frac{1}{\hat{r}} - \frac{1}{\hat{r}_s} \right) - 2 (I_{g_L}(\hat{r}) - I_{g_L}(\hat{r}_s)) - 1 \right). \quad (4.10)$$

Nuevamente, la rama de la función W dependerá del valor de \hat{r} .

Cuando se calcula \hat{g}_L para el modelo W03, se observa que el ajuste es mejor que el obtenido en los modelos previos. Al graficar la solución para W03 y compararla con el caso anterior donde se usa el \hat{g}_L propuesto por MV, se ve claramente que el modelo propuesto se ajusta mejor a la solución numérica (figuras 4.5, 4.6 y 4.7).

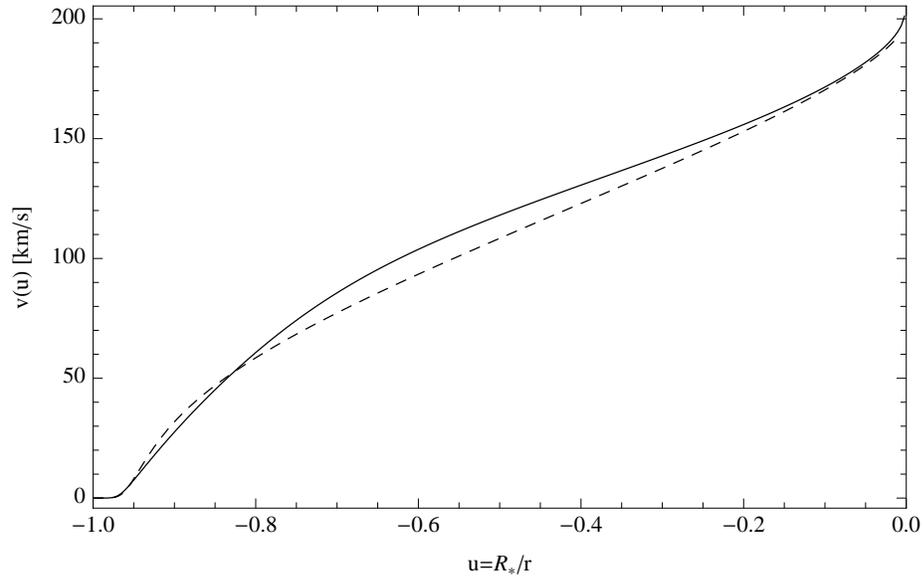


Figura 4.5: Perfil de velocidad de la solución analítica (línea a trazos) comparado con el de la solución numérica (línea sólida) para W03.

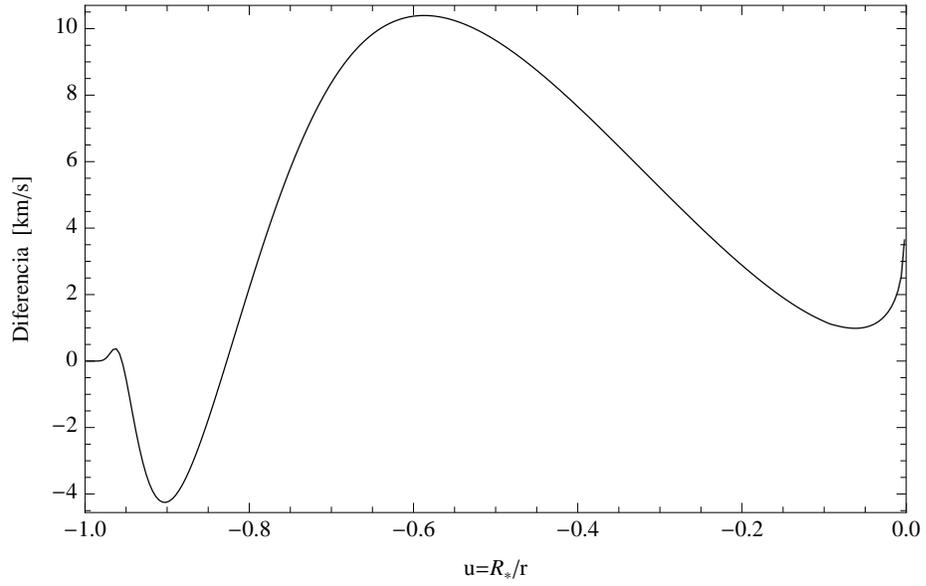


Figura 4.6: Diferencia en velocidades en km/s entre la solución analítica y la numérica para W03.

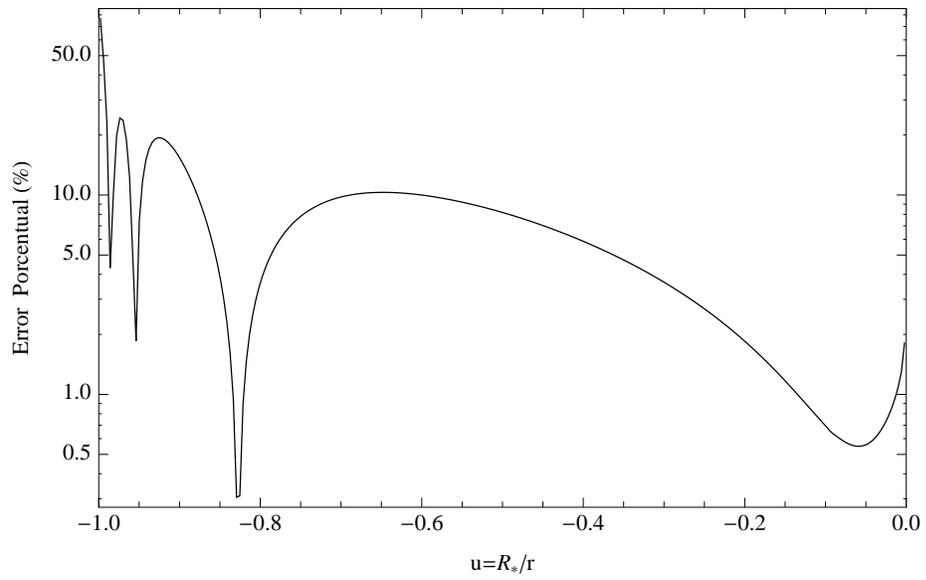


Figura 4.7: Error porcentual en escala logarítmica, entre la solución analítica y la numérica para W03.

Al comenzar este capítulo, se mostró que las metodologías de Villata y MV para obtener una solución analítica son satisfactorias sólo para las soluciones rápidas, en cambio, para las soluciones $L\delta$ se debe proponer una modificación a la metodología de MV. *Sin embargo, para obtener la solución analítica, ésta requiere, a su vez de una solución numérica. Por lo tanto, esta metodología no es útil para definir solución analítica de los vientos representados por la solución $L\delta$.* Un uso práctico de esta metodología, sería conocer cómo varían las soluciones analíticas (parámetros del ajuste) en relación a los parámetros estelares y del viento. En el siguiente capítulo se buscará una nueva relación y se obtendrá la solución analítica para las soluciones $L\delta$ en función de los parámetros estelares y del viento.

Capítulo 5

Malla Computacional

Debido a que el nuevo modelo no-lineal (ecuación 4.1) logra ajustar de una mejor manera el término g_L de la solución numérica en comparación con el modelo no-lineal de MV para las soluciones $L\delta$, y con el objetivo de contar con una relación de los parámetros del ajuste (g_0 , δ_1 , δ_2 y γ) con los parámetros estelares (v_{esc} , T_{eff} , $\log g^1$ y R_*/R_\odot) y del viento (α , k y δ), se genera una malla computacional de evolución estelar basada en los modelos (sin rotación) de Ekström et al. (2012).

Se sabe que la solución $L\delta$ describe los vientos de las estrellas supergigantes B (tipo tardío) y A. Con el objetivo de cubrir este rango estelar, la malla computacional se extiende en el rango de temperaturas entre 8000 K y 20000 K, y $\log(L_*/L_\odot)$ entre 4 y 6. En un diagrama HR, la extensión de la malla computacional se muestra en la figura 5.1. Los modelos estelares utilizados van desde 9 M_\odot a 40 M_\odot . En total se calcularon 200 modelos para generar esta malla computacional. En ésta los parámetros α y k provienen del trabajo de Abbott (1982) y δ se define arbitrariamente con los valores 0,27, 0,28, 0,30, 0,33 y 0,35. Con estos 200 modelos se buscaron soluciones numéricas hidrodinámicas al viento estelar, encontrando 84 soluciones $L\delta$ que son los puntos rojos de la figura 5.1, los puntos negros corresponden a los modelos en los cuales no se les encontró solución $L\delta$ (para los casos con $\delta = 0,27$ y 0,28 no se encuentran soluciones). A partir de estas 84 soluciones numéricas se ajustan las soluciones analíticas con la metodología de MV.

¹Logaritmo en base 10 de la gravedad superficial

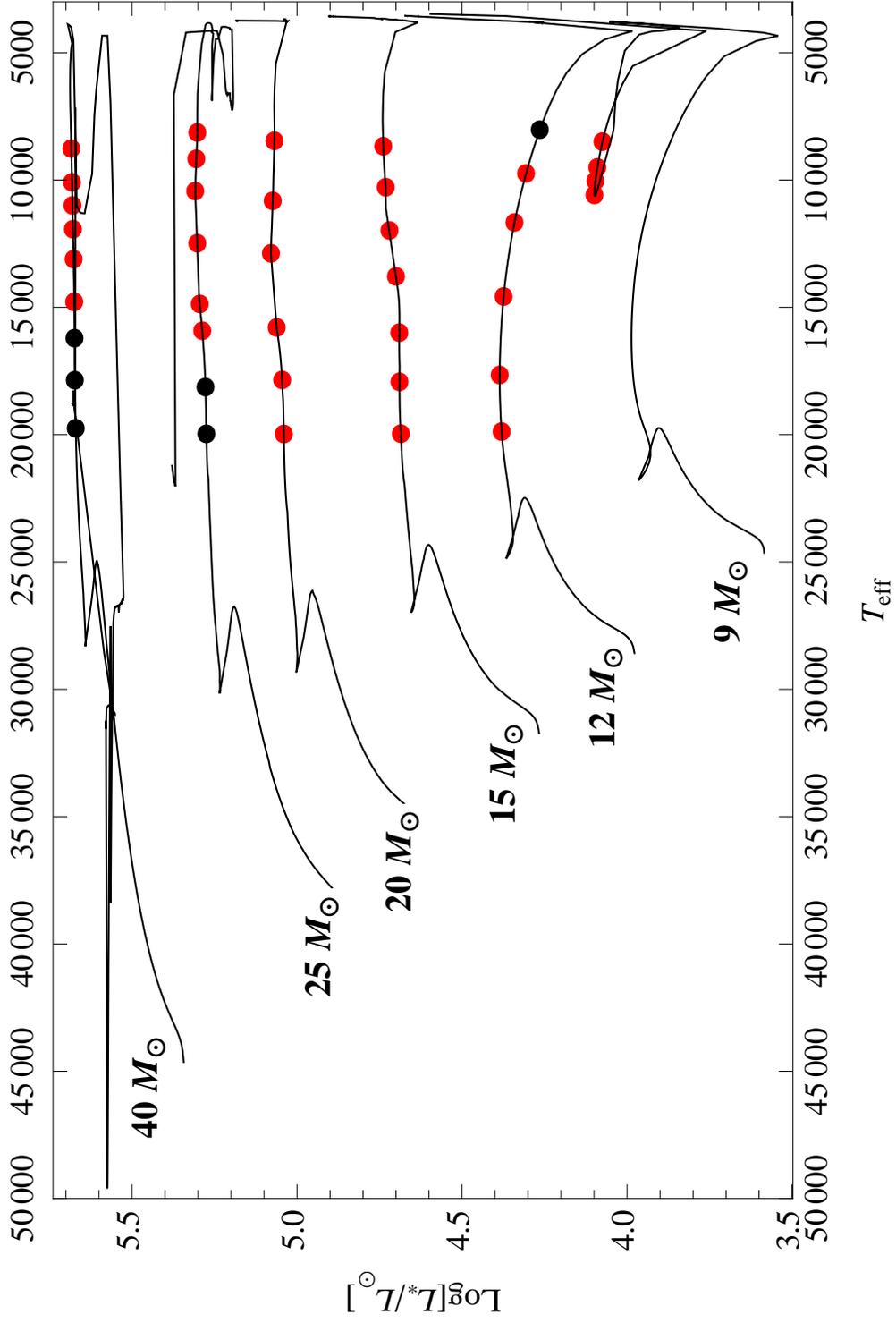


Figura 5.1: Malla computacional para estrellas BA supergigantes en el diagrama HR. Los modelos con solución numérica $L\delta$ se muestran con puntos rojos, los negros corresponden a los modelos sin solución numérica $L\delta$. Se grafican los tracks evolutivos para diferentes masas iniciales.

5.1. Distribución de parámetros

Al calcular las soluciones analíticas se obtienen los parámetros del ajuste. Utilizando estos parámetros y los parámetros que describen al viento y a la fotosfera de la estrella es posible encontrar correlaciones entre ellos. En las figuras 5.2 a 5.5 se observa la dependencia entre los parámetros del ajuste y la temperatura efectiva, dependiendo de la masa estelar y el valor de δ . Las gráficas de las correlaciones entre los parámetros del ajuste y otros parámetros estelares se discuten en el apéndice C.

Se puede observar la dependencia de la masa estelar con los parámetros g_0 , δ_2 y γ , en cambio, el parámetro δ_1 tiene una fuerte dependencia con el valor de δ . Los rangos de estos parámetros son: $0 \leq g_0 \leq 30$, $0,8 \leq \delta_1 \leq 0,9$, entre $20 \leq \delta_2 \leq 100$ y $0 \leq \gamma \leq 20$.

Al analizar (de forma visual) la dependencia de los parámetros del ajuste con la temperatura se opta por dividir los resultados en dos conjuntos: uno con $T_{eff} > 13000 K$ y otro con $T_{eff} < 13000 K$. Teniendo en cuenta esto último, se logra definir a los parámetros del ajuste como una función dependiente de los parámetros estelares y del viento (ver sección 5.2). Esta división se realiza debido a que se aprecian distintos comportamientos de los modelos en aquellos rangos.

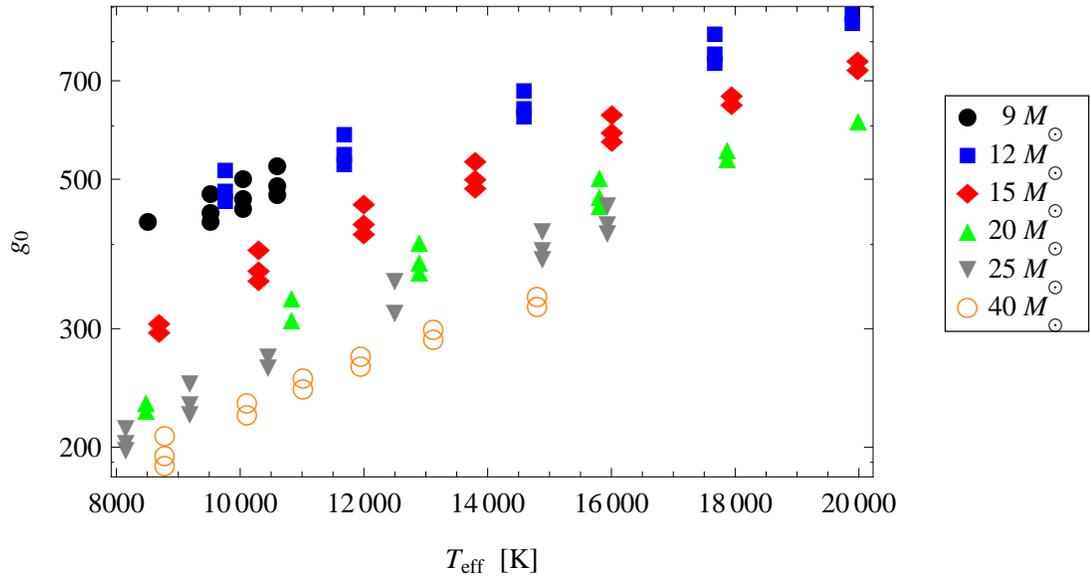


Figura 5.2: Distribución de g_0 en función de la T_{eff} para diferentes masas estelares.

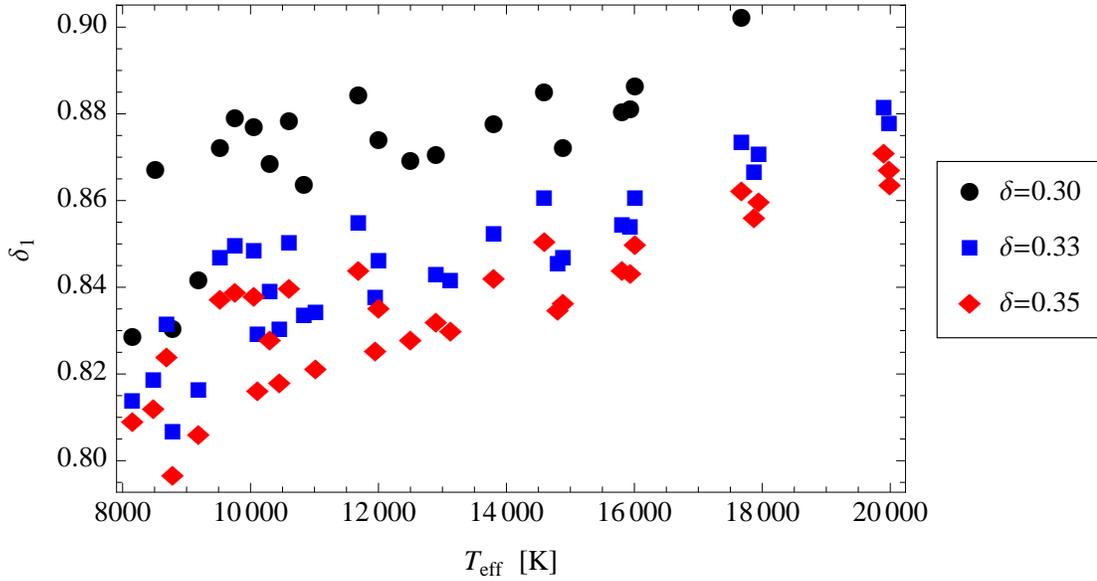


Figura 5.3: Distribución de δ_1 en función de la T_{eff} para diferentes valores de δ .

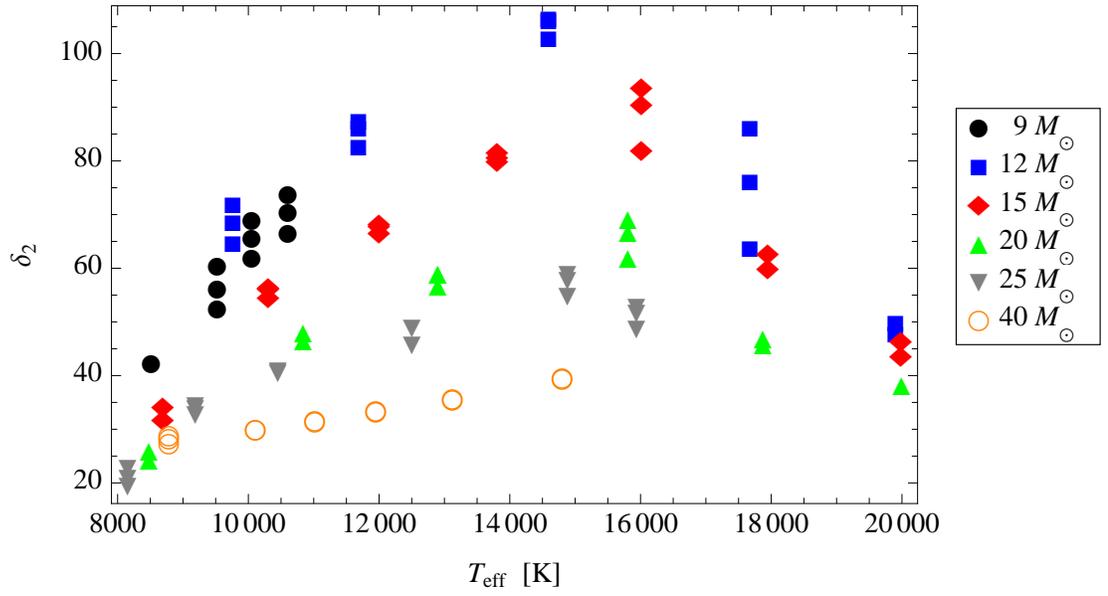


Figura 5.4: Distribución de δ_2 en función de la T_{eff} para diferentes masas estelares.

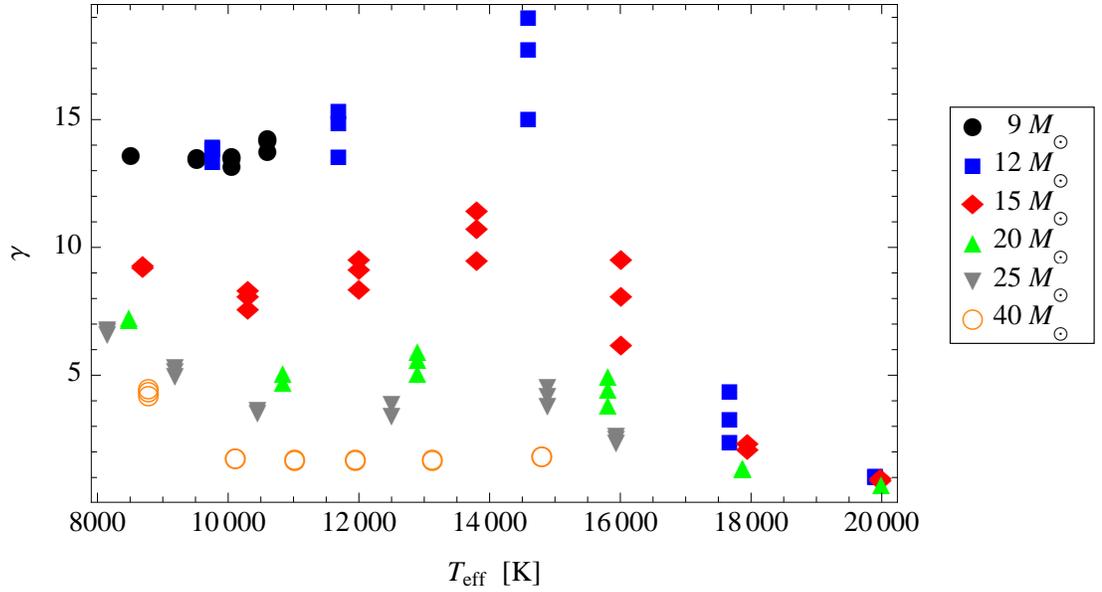


Figura 5.5: Distribución de γ en función de la T_{eff} para diferentes masas estelares.

5.2. Función ajuste

Utilizando los parámetros de la nueva parametrización de g_L se procede a realizar un ajuste de éstos, en función de los parámetros estelares y del viento, para los dos conjuntos de datos, $T_{eff} > 13000 K$ y $T_{eff} < 13000 K$. Por lo tanto, se obtiene g_0 , δ_1 , δ_2 y γ en función de v_{esc} , T_{eff} , $\log g$, R_*/R_\odot , α , k y δ . Para realizar el ajuste con estos dos conjuntos, no se utiliza ninguna metodología en especial, sino por medio de *prueba y error* se define el tipo de ajuste a realizar. Se deja como a trabajo a futuro realizar este ajuste por algún método estadístico más avanzado.

El ajuste para $T_{eff} < 13000 K$ se presenta en las ecuaciones 5.1 a 5.4:

$$\begin{aligned}
 g_0(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & 1738,28 + 17,2057 e^{\log g} - 3094,62 \alpha + 93,5542 k \\
 & - 753,822 \delta + 1,40762 R_*/R_\odot - 0,002084 (R_*/R_\odot)^2 \\
 & + 2,64248 v_{esc} [km/s] + 0,095291 T_{eff} [K] \\
 & + 1,60592 \times 10^{-6} (T_{eff} [K])^2 + 389,285 \log g \\
 & - 92,592 (\log g)^2,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_1(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & 2,1378 + 0,00601 e^{\log g} - 0,7302 \alpha + 0,0557 k \\
 & - 2,1619 \delta + 0,00056 R_*/R_\odot \\
 & - 9,4873 \times 10^{-7} (R_*/R_\odot)^2 + 0,000147 v_{esc} [km/s] \\
 & - 0,000032 T_{eff} [K] + 7,6177 \times 10^{-10} (T_{eff} [K])^2 \\
 & + 0,20014 \log g - 0,045716 (\log g)^2,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & - 543,84 - 4,3973 e^{\log g} - 62,661 \alpha + 32,274 k \\
& + 1136,66\delta - 0,50848 R_*/R_\odot + 0,000753 (R_*/R_\odot)^2 \\
& + 0,76946 v_{esc} [km/s] + 0,017862 T_{eff} [K] \\
& - 7,2219 \times 10^{-7} (T_{eff} [K])^2 - 203,909 \log g \\
& + 37,322 (\log g)^2
\end{aligned} \tag{5.3}$$

y

$$\begin{aligned}
\gamma(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & 109,01 - 0,32479 e^{\log g} + 11,286 \alpha - 7,3793 k \\
& - 170,623 \delta + 0,013804 R_*/R_\odot - 0,00004 (R_*/R_\odot)^2 \\
& + 0,078087 v_{esc} [km/s] - 0,002152 T_{eff} [K] \\
& - 6,3698 \times 10^{-8} (T_{eff} [K])^2 - 9,5612 \log g \\
& + 4,7309 (\log g)^2.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Para el conjunto $\mathbf{T}_{\text{eff}} > \mathbf{13000 K}$ se obtiene (ecuaciones 5.5 a 5.8):

$$\begin{aligned}
g_0(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & - 3777,05 + 830,142 \alpha + 3742,69 \delta - 0,4888 R_*/R_\odot \\
& + 0,0614 T_{eff} [K] + 2,8096 v_{esc} [km/s] + 136,275 k \\
& + 1123,46 \log g + 1553,87 \log(\delta) \\
& + 391,008 \log(R_*/R_\odot) - 369,864 \log(T_{eff} [K]) \\
& - 1228,53 \log(v_{esc} [km/s]),
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & -0,180065 - 0,42923 \alpha - 0,72279 \delta \\
& - 0,000057 R_*/R_\odot - 0,000012 T_{eff} - \\
& 0,000094 v_{esc} [km/s] + 0,11789 k + 0,13674 \log g \\
& + 0,06028 \log (R_*/R_\odot) + 0,11712 \log (T_{eff} [K]), \\
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta_2(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & -7917,48 - 14363,2 \alpha + 105,241 \delta \\
& + 0,05092 T_{eff} - 0,90533 v_{esc} [km/s] - 993,705 k \\
& + 356,765 \log g + 75,3645 \log (R_*/R_\odot) \\
& - 72,921 \log (T_{eff} [K]) \\
\end{aligned} \tag{5.7}$$

y

$$\begin{aligned}
\gamma(v_{esc}, T_{eff}, \log g, R_*/R_\odot, \alpha, k, \delta) = & 3129,35 - 1629,24 \alpha + 32,5072 \delta + 0,153756 R_*/R_\odot \\
& + 0,023299 T_{eff} - 0,12324 v_{esc} [km/s] \\
& - 40,7715 k - 332,273 \log g - 22,3597 \log (R_*/R_\odot) \\
& - 692,842 \log (T_{eff} [K]) + 835,991 \log (v_{esc} [km/s]). \\
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A modo de ejemplo, para dos estrellas con $T_{eff} < 13000 K$ y $T_{eff} > 13000 K$ se grafica \hat{g}_L (figuras 5.6 y 5.7), el perfil de velocidades (figuras 5.8 y 5.9), la diferencia de velocidades con respecto a la solución numérica (figuras 5.10 y 5.11) y el error porcentual (figuras 5.12 y 5.13) utilizando los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ dependientes de los parámetros estelares y del viento, para el caso que corresponda. Al observar ambos perfiles de velocidades se aprecia que ajustan de buena manera con la solución numérica. Si se analizan las diferencias y los errores porcentuales es posible concluir que los parámetros ajustados para el conjunto $T_{eff} > 13000 K$ concuerdan mejor con la solución numérica que para el conjunto $T_{eff} < 13000 K$. Esta tendencia se observa en la mayoría de los modelos de la malla computacional.

En la siguiente sección se analizará la pérdida de masa y la velocidad terminal utilizando los parámetros (g_0 , δ_1 , δ_2 y γ) ajustados.

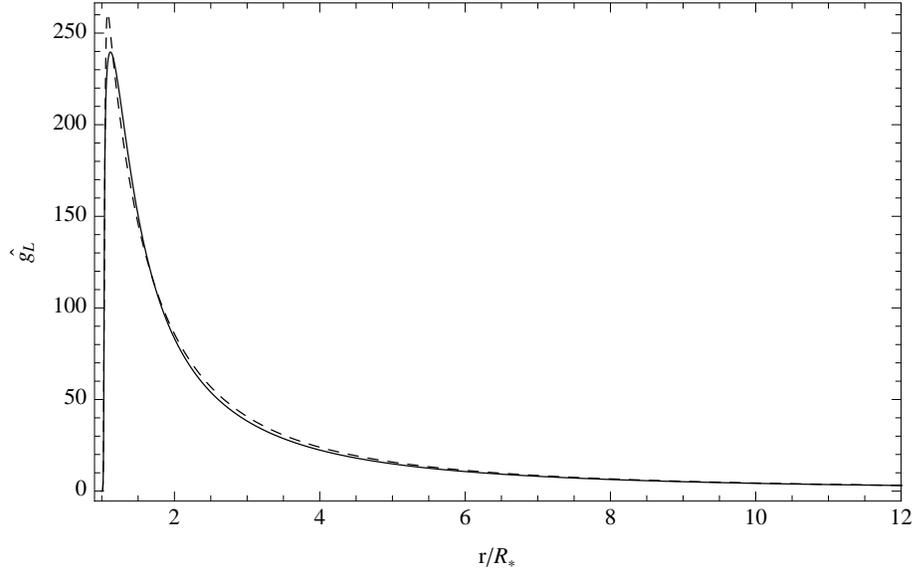


Figura 5.6: \hat{g}_L utilizando las funciones g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para una estrella con $T_{eff} < 13000 K$. La línea sólida corresponde a la solución numérica, la línea a trazos es la descripción analítica de $\hat{g}_L(\hat{r})$.

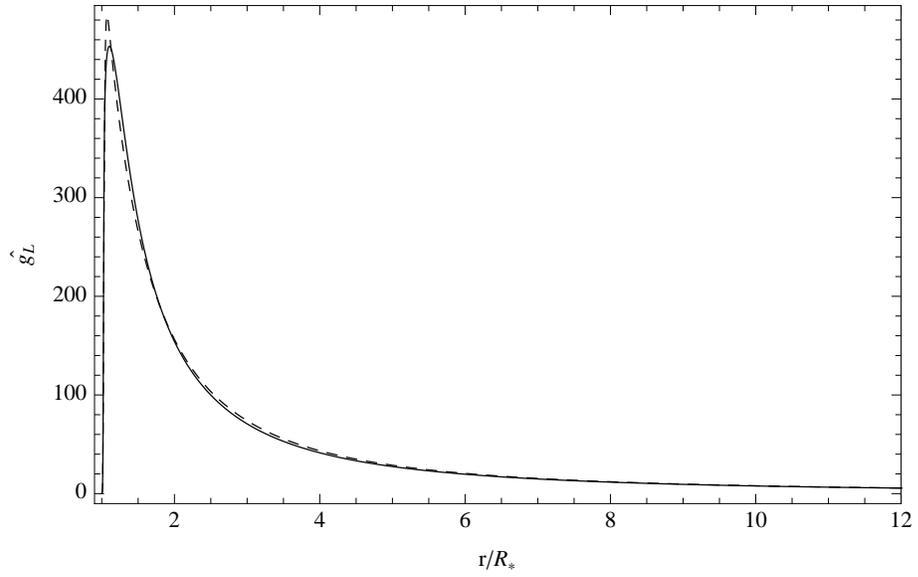


Figura 5.7: \hat{g}_L utilizando los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para una estrella con $T_{eff} > 13000 [K]$. La línea sólida corresponde a la solución numérica, la línea a trazos es la descripción analítica de $\hat{g}_L(\hat{r})$.

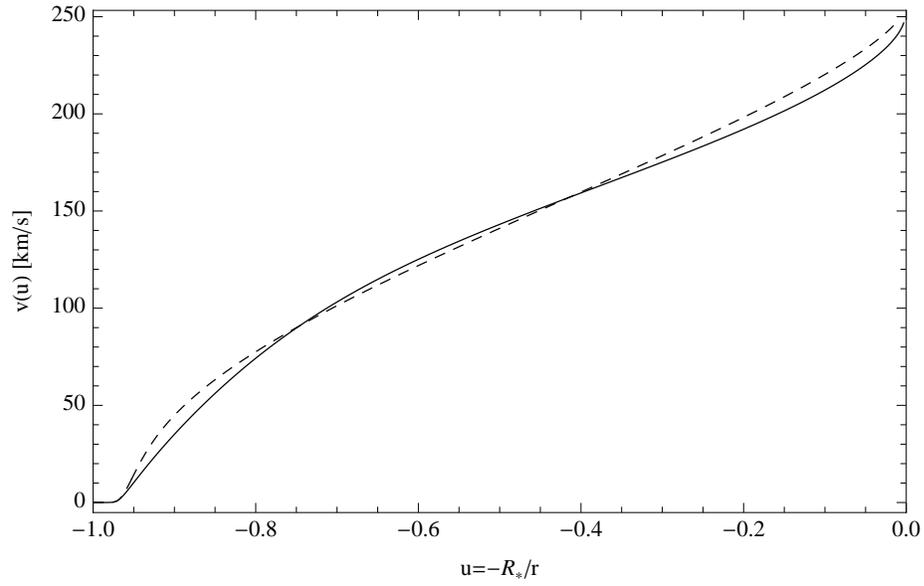


Figura 5.8: Perfil de velocidades utilizando los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para una estrella con $T_{eff} < 13000 K$. La línea sólida corresponde a la solución numérica, la línea a trazos es la solución analítica.

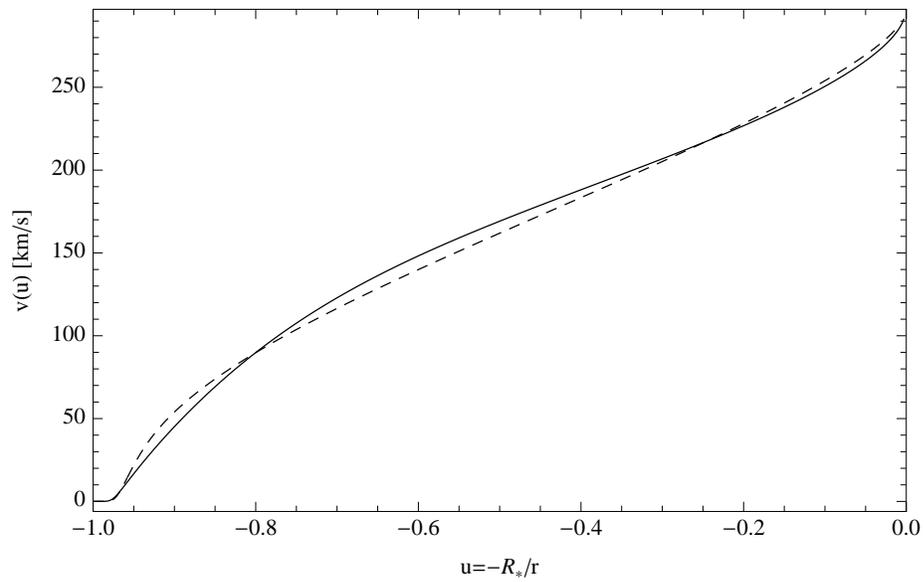


Figura 5.9: Perfil de velocidades utilizando los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ para una estrella con $T_{eff} > 13000 K$. La línea sólida corresponde a la solución numérica, la línea a trazos es la solución analítica.

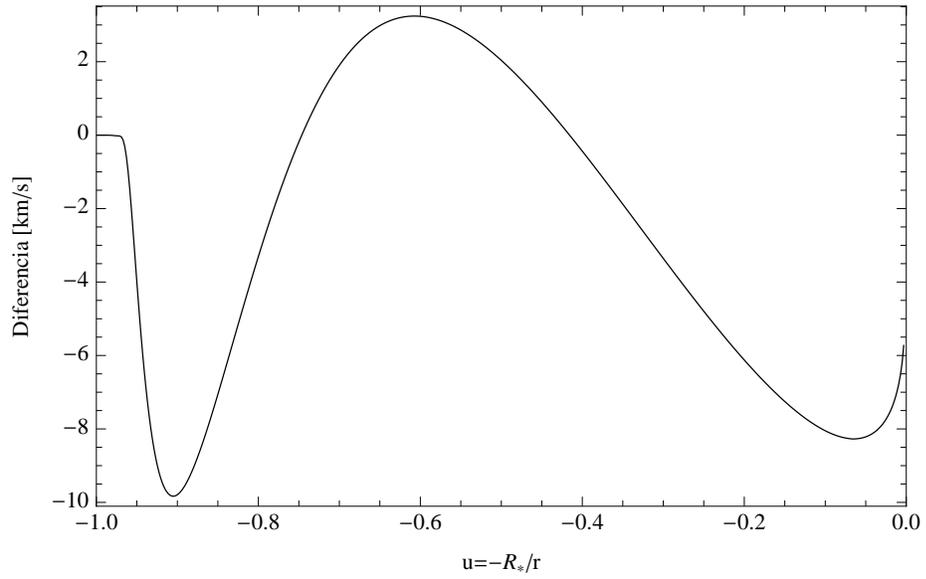


Figura 5.10: Diferencia en velocidades para una estrella con $T_{eff} < 13000 K$.

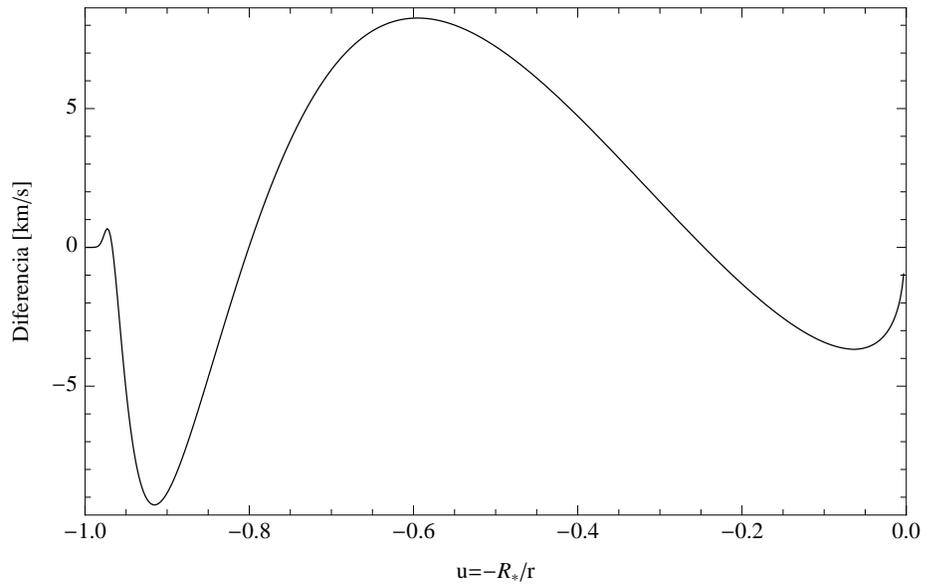


Figura 5.11: Diferencia en velocidades para una estrella con $T_{eff} > 13000 K$.

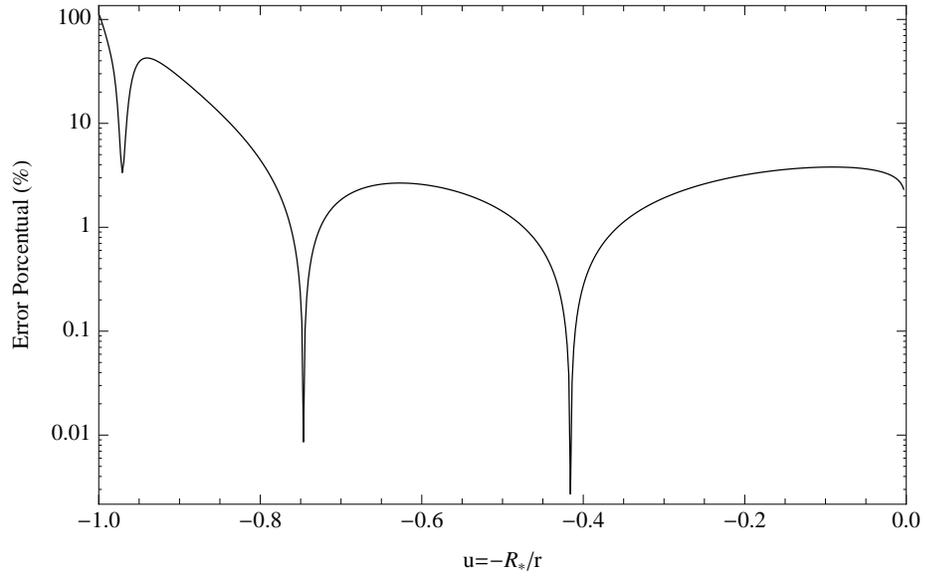


Figura 5.12: Error porcentual en escala logarítmica para una estrella con $T_{eff} < 13000 K$.

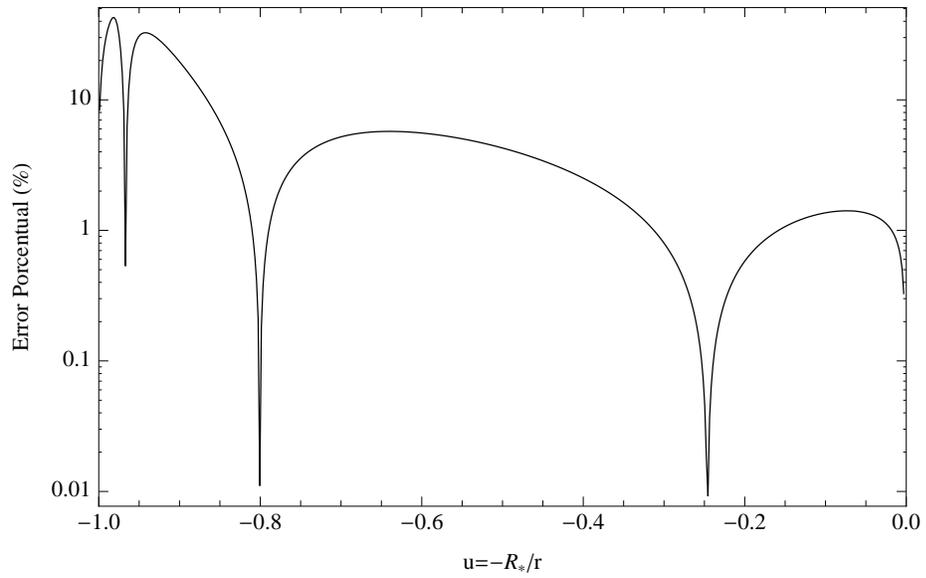


Figura 5.13: Error porcentual en escala logarítmica para una estrella con $T_{eff} > 13000 K$.

5.3. Pérdida de masa y velocidad terminal

El cálculo de la pérdida de masa \dot{M} se basa en el trabajo de Curé (2004), donde a través de un cambio de variables en el modelo m-CAK se obtiene la localización del punto singular de forma totalmente analítica y sin ninguna aproximación. El cambio de variables utilizado es:

$$u = \frac{-R_*}{r}, \quad (5.9)$$

$$w = \frac{v}{a} \quad (5.10)$$

y

$$w' = \frac{dw}{du}. \quad (5.11)$$

Al introducirlas en la ecuación de movimiento (2.63) se obtiene,

$$F(u, w, w') \equiv \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) w \frac{dw}{du} + A + \frac{2}{u} - C' FC g(u) (w)^{-\delta} \left(w \frac{dw}{du}\right)^\alpha = 0, \quad (5.12)$$

donde

$$A = \frac{GM(1 - \Gamma)}{a^2 R_*} = \frac{v_{esc}^2}{2a^2}, \quad (5.13)$$

$$C' = C \left(\frac{\dot{M} D 10^{-11}}{2\pi a R_*^2} \right)^\delta (a^2 R_*)^{(\alpha-1)} \quad (5.14)$$

y

$$g(u) = \left(\frac{u^2}{1 - \sqrt{1 - u^2}} \right)^\delta. \quad (5.15)$$

D es definido por

$$D = \frac{(1 + Z_{He}Y_{He})}{(1 + A_{He}Y_{He})} \frac{1}{m_H}, \quad (5.16)$$

donde Y_{He} es la abundancia relativa al hidrógeno, Z_{He} es la cantidad de electrones libres provistos por el helio, A_{He} es el número másico del helio y m_H es la masa del protón.

Para obtener el valor del punto singular se debe satisfacer la condición de singularidad:

$$\frac{\partial}{\partial w'} F(u, w, w') = 0. \quad (5.17)$$

En este punto, se impone la condición de regularidad:

$$\frac{d}{du} F(u, w, w') = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} w' = 0. \quad (5.18)$$

Utilizando el cambio de coordenadas:

$$Y = ww' \quad (5.19)$$

y

$$Z = \frac{w}{w'} \quad (5.20)$$

las ecuaciones 5.12, 5.17 y 5.18 se transforman respectivamente en:

$$\left(1 - \frac{1}{YZ}\right) Y + A + \frac{2}{u} - C' f_1(u, Z)g(u)Z^{-\delta/2}Y^{\alpha-\delta/2} = 0, \quad (5.21)$$

$$\left(1 - \frac{1}{YZ}\right) Y - C' f_2(u, Z)g(u)Z^{-\delta/2}Y^{\alpha-\delta/2} = 0 \quad (5.22)$$

y

$$\left(1 + \frac{1}{YZ}\right) Y - \frac{2Z}{u^2} - C' f_3(u, Z)g(u)Z^{-\delta/2}Y^{\alpha-\delta/2} = 0, \quad (5.23)$$

las definiciones de $f_1(u, Z)$, $f_2(u, Z)$ y $f_3(u, Z)$ se encuentran en el apéndice D.

Despejando u de las ecuaciones 5.22 y 5.23 es posible determinar el punto singular. Una vez encontrado se introduce en la ecuación 5.12, de la cual se obtiene la pérdida de masa \dot{M} .

Utilizando las funciones $R(u, Z)$ y $H(u, Z, C')$ (ver Curé & Rial 2007):

$$R(u, Z) = -\frac{2}{Z} + \frac{2Z}{u^2} + f_{123}(u, Z) \left(A + \frac{2}{u} \right), \quad (5.24)$$

$$H(u, Z, C') = \left(1 - \frac{1}{YZ} \right) Y - C' f_2(u, Z) g(u) Z^{-\delta/2} Y^{\alpha-\delta/2}, \quad (5.25)$$

donde

$$f_{123}(u, Z) \equiv \frac{f_2(u, Z) - f_3(u, Z)}{f_2(u, Z) - f_1(u, Z)} \quad (5.26)$$

e

$$Y = \frac{1}{Z} + \left(\frac{f_2}{f_1 - f_2} \right) \left(A + \frac{2}{u} \right) \quad (5.27)$$

es posible conocer gráficamente la locación del punto singular, el cual se define como la intersección de las curvas $R(u, Z) = 0$ y $H(u, Z, C') = 0$ (figura 5.14). La curva $R(u, Z) = 0$ presenta dos ramas de soluciones. La que se encuentra más alejada en la dirección radial de la estrella es la solución $L\delta$. La curva $H(u, Z, C') = 0$, al depender de C' , es la que condiciona el valor de \dot{M} .

Al conocer la posición de los puntos singulares de todos los modelos $L\delta$ de la malla computacional, se concluye que la ubicación de estos no varía demasiado para cada conjunto de datos ($T_{eff} < 13000 K$ y $T_{eff} > 13000 K$), debido a que la intersección de las curvas $R(u, Z) = 0$ y $H(u, Z, C') = 0$ se mantiene aproximadamente constante en el eje u para la rama de soluciones $L\delta$ de la función $R(u, Z)$. A raíz de esto, para simplificar los cálculos, se opta por tomar el promedio de los puntos singulares, y utilizando estos valores, se procede a calcular la pérdida de masa.

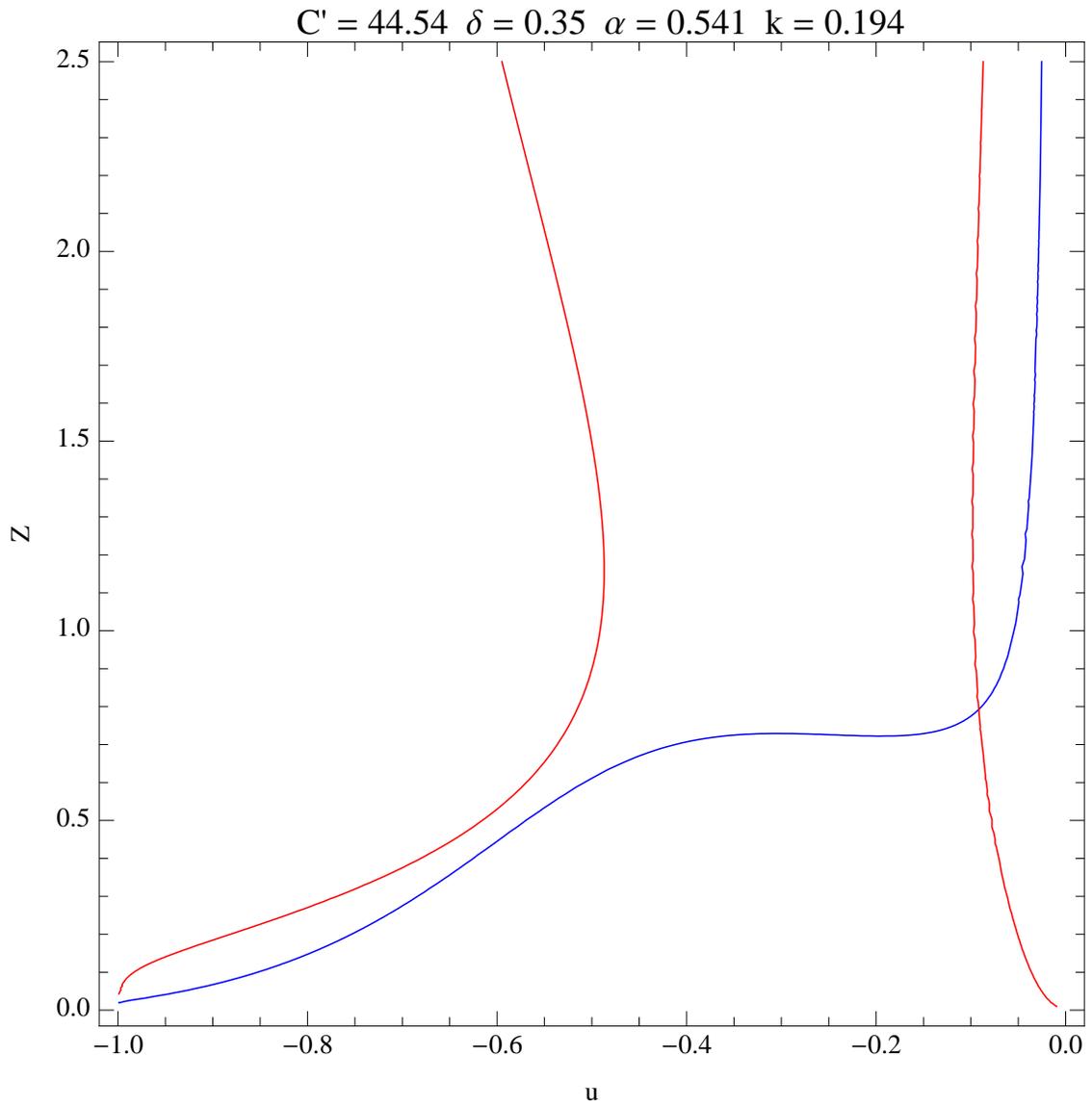


Figura 5.14: Ubicación del punto singular para un modelo de la malla computacional. La curva $R(u, Z) = 0$ presenta dos ramas de soluciones, la izquierda representa la familia de soluciones rápidas, la derecha la familia de soluciones $L\delta$. La posición del punto singular esta dada por la intersección de las curvas $R(u, Z) = 0$ (línea roja) y $H(u, Z, C') = 0$ (línea azul).

El promedio de los puntos singulares para $T_{eff} < 13000 K$ es $u = -0,09013$ y para $T_{eff} > 13000 K$ es $u = -0,07185$. Utilizando estos valores se obtienen los siguientes resultados para la pérdida de masa: la mediana de los errores porcentuales es del 3% para $T_{eff} < 13000 K$ y en el caso de $T_{eff} > 13000 K$ la mediana es del 2% (figuras 5.15 y 5.16).

Las velocidades terminales v_∞ se calculan definiendo su valor a $100 R_*$, es decir, $v(r = 100 R_*)$. El error porcentual para $T_{eff} < 13000 K$ tiene una mediana del 1% y para $T_{eff} > 13000 K$, la mediana presenta el mismo valor del 1% (figuras 5.17 y 5.18).

Con respecto a la pérdida de masa y la velocidad terminal, se puede notar que los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ tienen mejores resultados para el caso $T_{eff} > 13000 K$. Ésto último se puede explicar por medio de la distribución de los parámetros en función de la temperatura, la cual muestra que para $T_{eff} < 13000 K$ hay una mayor dispersión.

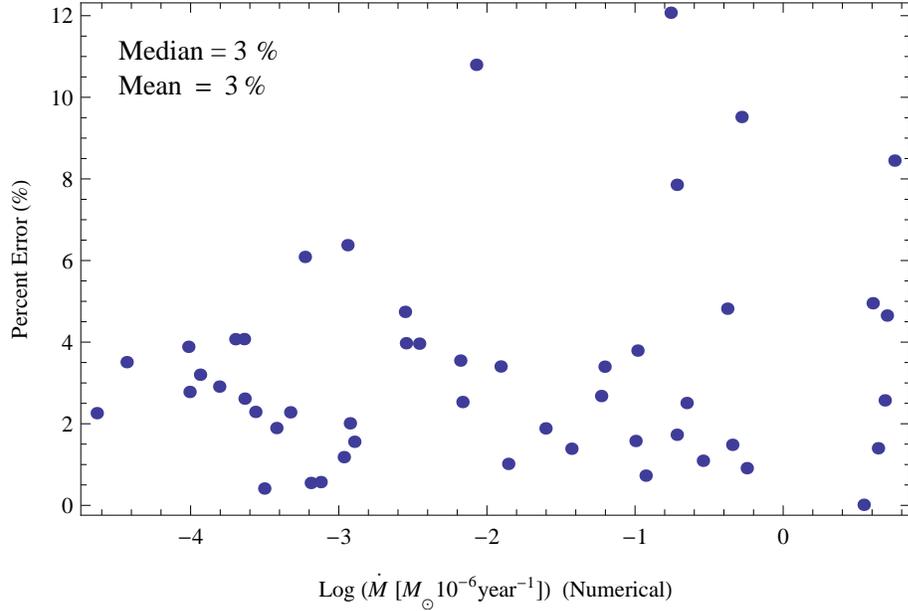


Figura 5.15: Error porcentual de la \dot{M} para $T_{eff} < 13000 K$.

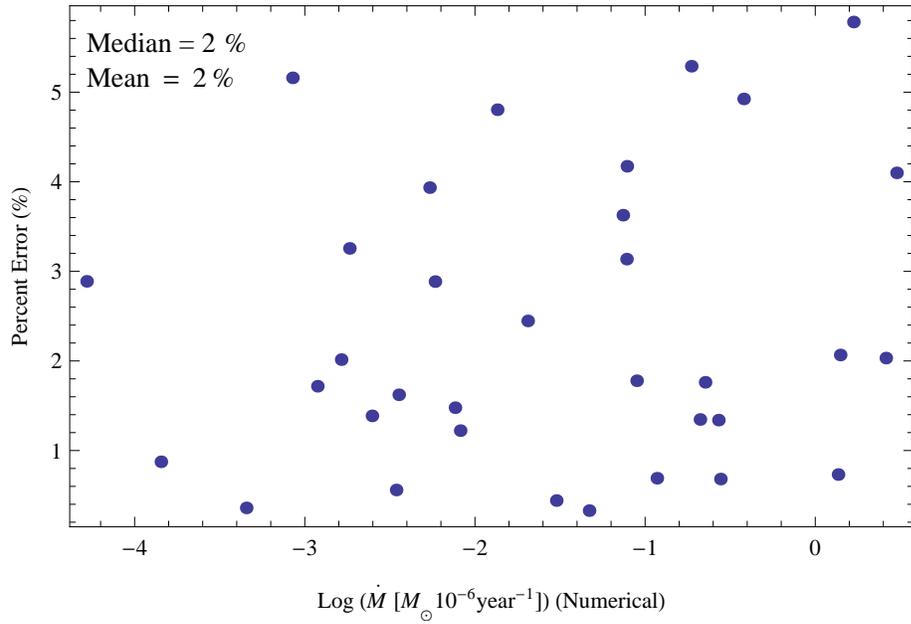


Figura 5.16: Error porcentual de la \dot{M} para $T_{eff} > 13000 K$.

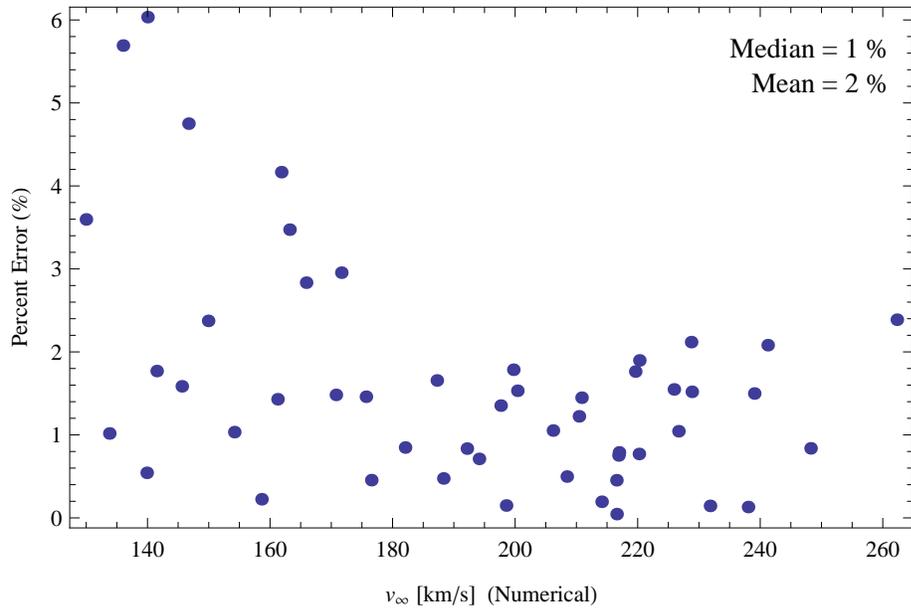


Figura 5.17: Error porcentual de la v_{∞} para $T_{eff} < 13000 K$.

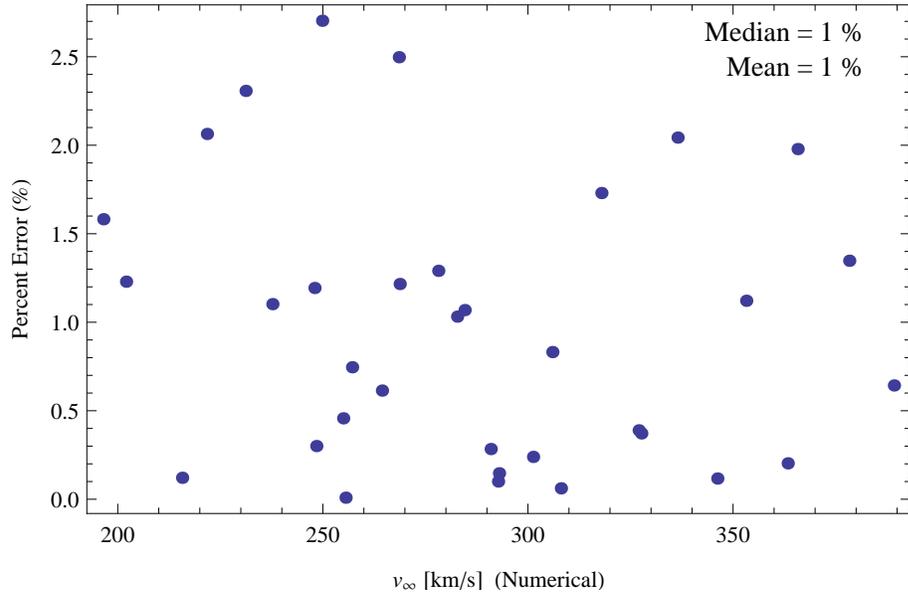


Figura 5.18: Error porcentual de la v_{∞} para $T_{eff} > 13000 K$.

5.4. Otros Resultados

Utilizando los datos de la malla computacional es posible derivar otros resultados que no correspondían en los objetivos iniciales de esta tesis.

5.4.1. Relación momentum-luminosidad del viento

Uno de los más importantes, es la relación momentum-luminosidad del viento WLR (ver Introducción). Existe una discrepancia entre las observaciones y la teoría para estrellas BA supergigantes con $T_{eff} < 22000 K$ (figura 5.19). El momentum del viento calculado con los modelos teóricos es mayor al obtenido de las observaciones.

Al calcular el momentum del viento con los modelos de la malla computacional, se observa que para algunos el momentum se ajusta de buena manera a las observaciones (figura 5.20), las cuales son estrellas entre $11000 K < T_{eff} < 20000 K$ (Markova & Puls 2008; Crowther et al. 2006). Por lo mismo, para cada δ se realiza un ajuste lineal del momentum del viento para los modelos entre $11000 K < T_{eff} < 20000 K$, el cual se grafica en la figura 5.21. Se observa que existe una buena relación entre las observaciones y los modelos.

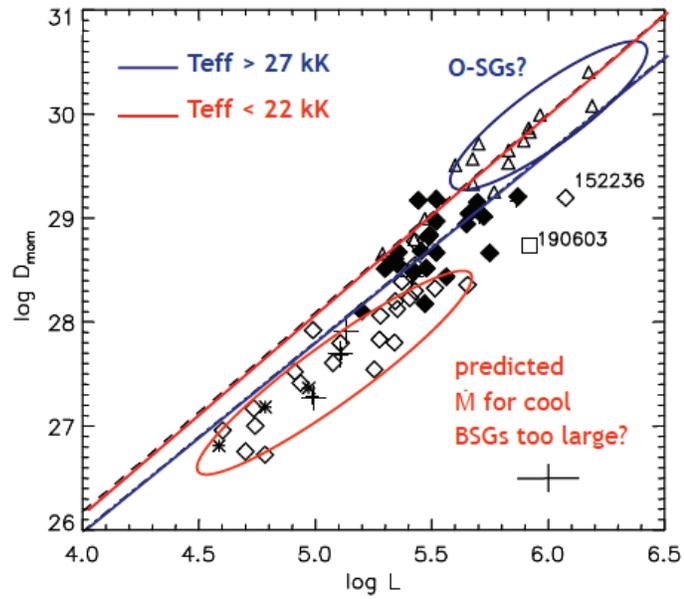


Figura 5.19: Discrepancia en la WLR entre la teoría y las observaciones. Imagen extraída de Markova & Puls (2008).

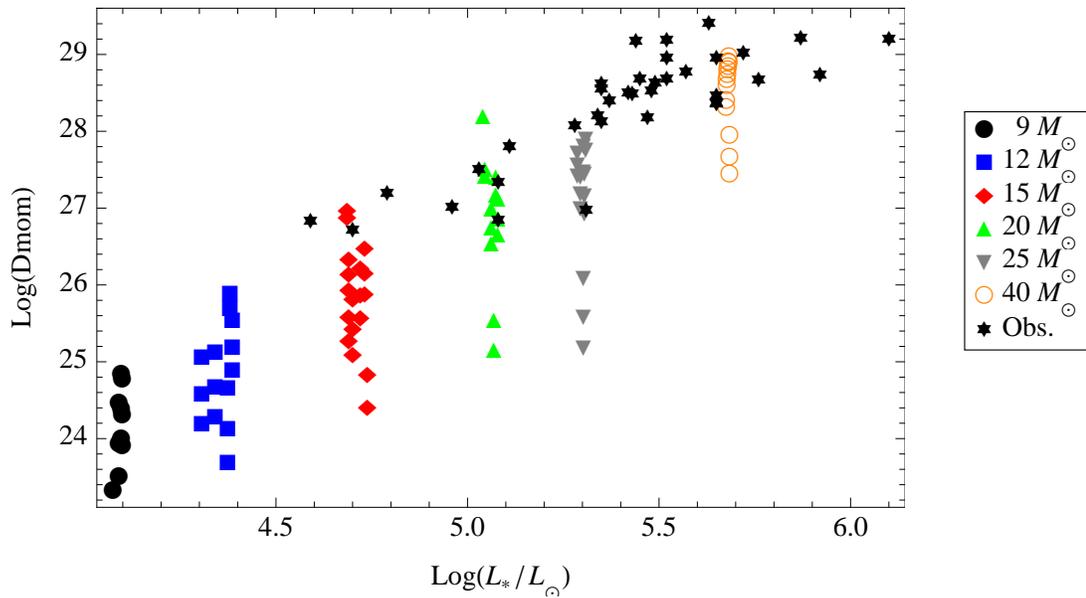


Figura 5.20: WLR obtenida de la malla computacional. Para algunos modelos las observaciones entre $11000 K < T_{eff} < 20000 K$ se ajustan de buena manera.

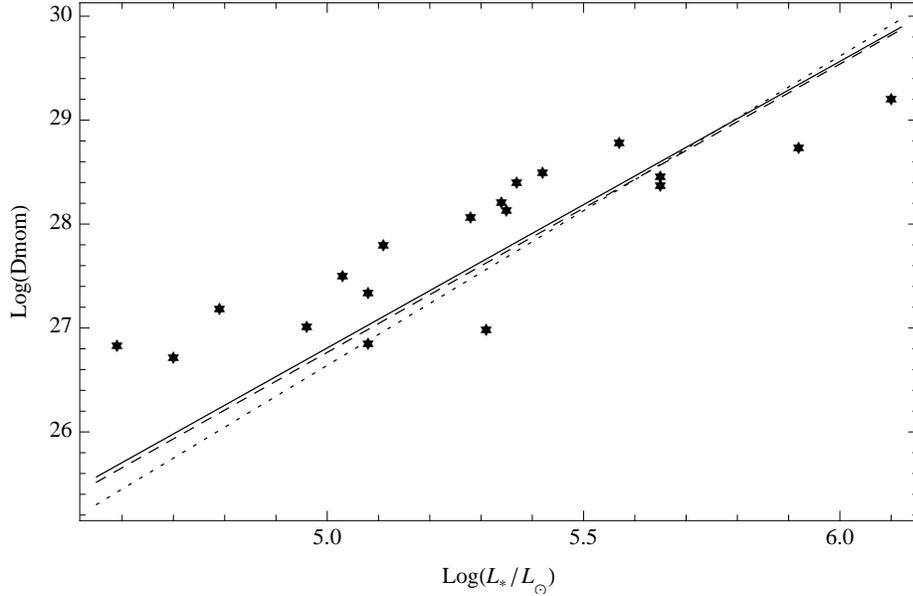


Figura 5.21: WLR obtenida de la malla computacional para estrellas con $11000 K < T_{eff} < 20000 K$. La línea negra equivale a los modelos con $\delta = 0,3$, la línea a trazos a modelos con $\delta = 0,33$ y la línea punteada a modelos con $\delta = 0,35$. Las cuales se ajustan de buena manera con las observaciones entre $11000 K < T_{eff} < 20000 K$.

El momentum del viento (ecuación 1.1) depende de la pérdida de masa, que en la teoría se calcula con los modelos de Vink et al. (2000), éstos se basan en la solución rápida, lo que explicaría porqué éstos no se ajustan, mientras que los calculados a partir de la malla computacional con soluciones $L\delta$ sí lo hacen. Cabe recordar que la solución $L\delta$ posee una pérdida de masa menor en comparación a la solución rápida.

Como trabajo a futuro se propone analizar más a fondo estos resultados, los que explicarían las discrepancias actuales entre la teoría y las observaciones.

5.4.2. Velocidad terminal

Otro resultado que se obtiene de la malla computacional es la relación entre las velocidades terminales y la temperatura de una estrella. Las observaciones (Markova & Puls 2008) muestran un salto de bi-estabilidad dependiendo de la temperatura (ver figura 5.22). Los modelos de la malla computacional muestran un aumento de la razón v_{∞}/v_{esc} a medida que la temperatura disminuye (figura 5.23). Al comparar estos resultados con los obtenidos de la figura 5.22 se observa que los modelos están levemente por debajo del valor de v_{∞}/v_{esc} para $T_{eff} < 18000 K$. Esta diferencia podría ser atribuida a una carencia de estrellas observadas para aquella región. A pesar de esto, al utilizar los resultados de la malla computacional se sigue manteniendo el salto de bi-estabilidad. Además, se grafica la relación entre las velocidades terminales y la velocidad de escape de una estrella (figura 5.24) utilizando los modelos de la malla computacional y la comparamos con la que muestra Curé et al. (2011) en su artículo (figura 5.25), en la cual existen datos teóricos y observacionales (Verdugo et al. 1998). Se observa en ambas figuras la misma tendencia de decrecimiento para v_{∞}/v_{esc} con respecto a v_{esc} .

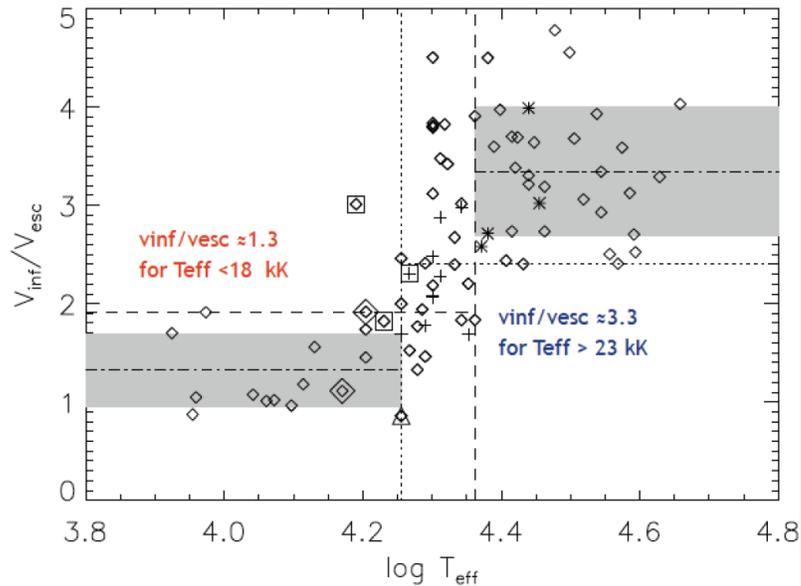


Figura 5.22: Relación entre v_{∞}/v_{esc} y T_{eff} para estrellas observadas. Imagen extraída de Markova & Puls (2008).

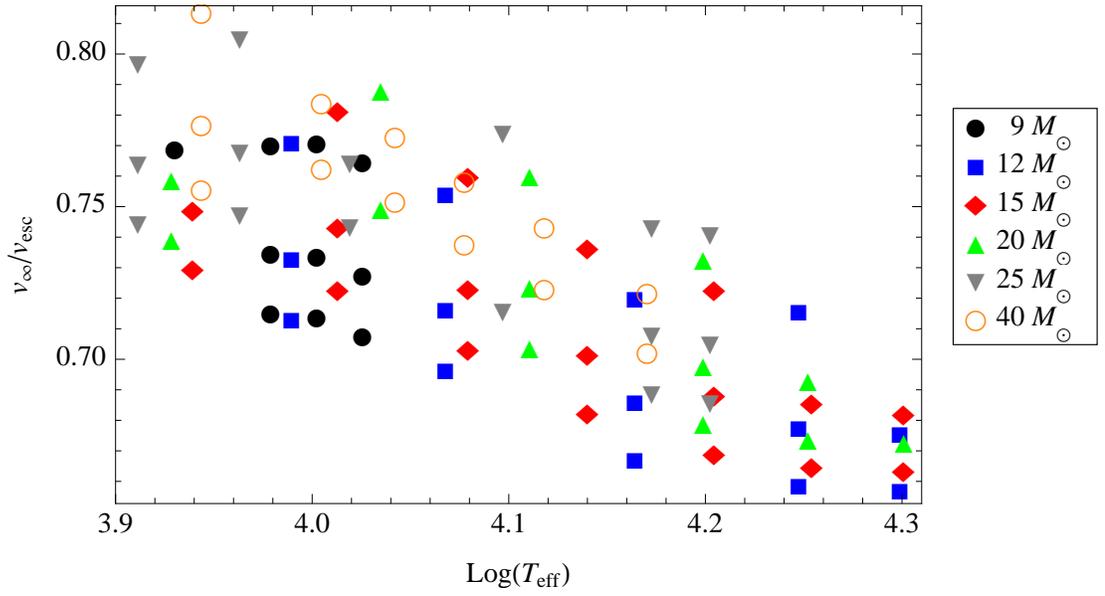


Figura 5.23: Relación entre v_∞/v_{esc} y T_{eff} utilizando los modelos de la malla computacional.

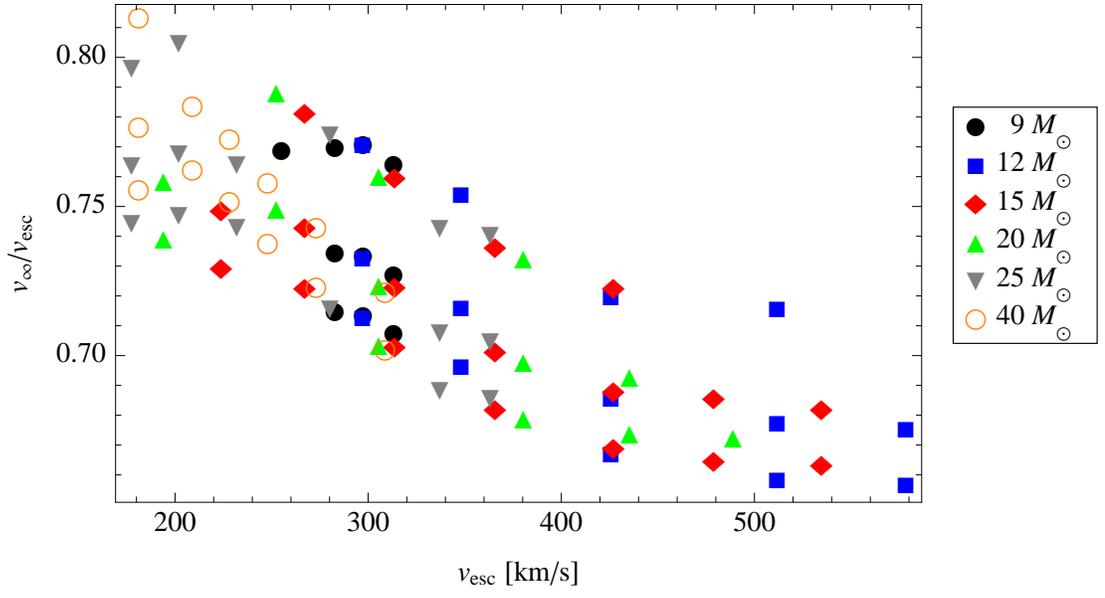


Figura 5.24: Relación entre v_∞/v_{esc} y v_{esc} utilizando los modelos de la malla computacional.

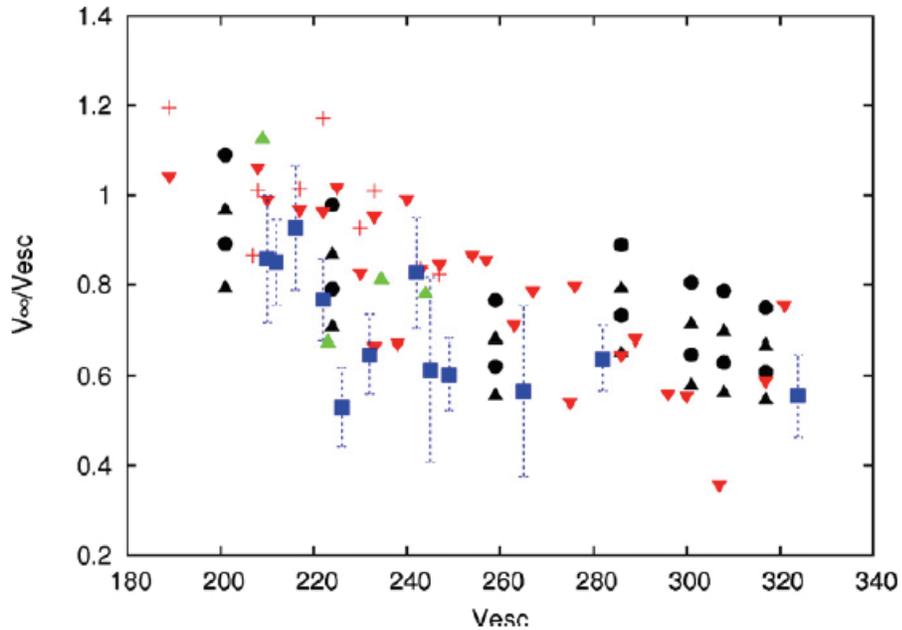


Figura 5.25: Relación entre v_{∞}/v_{esc} y v_{esc} . Se grafican modelos teóricos y observacionales. Imagen extraída de Curé et al. (2011) (ver dicho artículo para simbología).

Para finalizar, se puede concluir que a partir de los resultados obtenidos, los parámetros ajustados (g_0 , δ_1 , δ_2 y γ) para las soluciones $L\delta$ cumple con el objetivo de representar de buena manera una solución analítica, la cual se deriva de una modificación del trabajo de MV. Esta solución posee un error en sus resultados (pérdida de masa y velocidad terminal) dentro de un porcentaje aceptable, 20 % para $T_{eff} < 13000 K$ y 10 % para $T_{eff} > 13000 K$, al compararla con solución numérica. A partir de estos errores también se concluye que para $T_{eff} > 13000 K$ la solución analítica discrepa en menor medida con la solución numérica, que al utilizar la solución analítica para $T_{eff} < 13000 K$.

Ade más, se utilizan los datos de la malla computacional para analizar las relaciones momentum-luminosidad y v_{∞}/v_{esc} . Para el caso de la WLR se logra dar una solución a la discrepancia que hay entre la teoría y observaciones. Esta solución ya había sido propuesta por Curé et al. (2011). Para la relación v_{∞}/v_{esc} se logra predecir un decrecimiento a medida que aumenta la velocidad de escape (o temperatura). Este mismo comportamiento es el que muestran las observaciones para este tipo de estrellas. *La importancia de estas relaciones es que llevan a confirmar que los vientos de las estrellas BA supergigantes se rigen por una solución $L\delta$.*

Capítulo 6

Conclusiones

Utilizando la metodología de MV y Villata se obtuvieron soluciones analíticas $L\delta$ para los vientos de estrellas BA supergigantes sin resultados satisfactorios. Estas soluciones analíticas mostraban una gran diferencia con la solución numérica. Modificando la metodología de MV, en particular la funcionalidad de la aceleración de las líneas \hat{g}_L , es posible encontrar una solución analítica que concuerda mejor con las soluciones numéricas para los casos $L\delta$. El término \hat{g}_L propuesto en este trabajo depende de los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ , los cuales se ajustan de la solución numérica.

Se crea una malla computacional que utiliza los modelos evolutivos de estrellas BA supergigantes sin rotación, de la cual se calculan las soluciones $L\delta$. Al poseer una malla computacional con parámetros estelares y del viento, es posible establecer una relación con los parámetros del ajuste. Estos últimos pasan a ser dependientes de los parámetros estelares y del viento, los cuales son conocidos. Este resultado es de vital importancia, ya que se ha podido establecer una función analítica (que se basa en la metodología de MV) para los vientos estelares de estrellas BA supergigantes con soluciones $L\delta$, la cual provee el perfil de velocidades y la pérdida de masa de los vientos. El punto débil de esta solución analítica es que depende de la función W, cuya solución no se encuentra por métodos algebraicos ordinarios.

La solución analítica obtenida depende del rango de la temperatura superficial de la estrella, es decir, si la estrella posee una $T_{eff} < 13000$ la solución esta definida de una manera y si la $T_{eff} > 13000$ se define de otra. Esta división se realiza debido a que se encuentran dos tipos de comportamientos para los parámetros del ajuste en función de la temperatura (ver sección 5.1). La precisión de la solución analítica, en referencia a la pérdida de masa y la velocidad terminal, es relativamente buena, para $T_{eff} < 13000$ el error porcentual no supera el 12 % y para $T_{eff} > 13000$ la cota máxima llega hasta el 6 %. El hecho que para $T_{eff} < 13000$ el error porcentual sea mayor se debe a que en esa región la distribución entre los parámetros muestra una mayor dispersión.

Se observa que los perfiles de velocidades de la solución analítica se ajustan de buena manera a la solución numérica, aunque existen diferencias en la base del viento que en algunos casos es mayor al 100 % de error porcentual. Este error nace del ajuste que se hace inicialmente a \hat{g}_L para encontrar los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ , en el cual el peso estadístico que se le dá a la base del viento es menor que en las otras regiones del ajuste: La razón de esto es debido que al usar un peso uniforme para todas las regiones, el ajuste no es bueno. Este mismo problema se presenta en las metodologías previas (Villata y MV), en las cuales también se propone que el error nace de un mal ajuste en la base del viento.

Poseer una función analítica para las soluciones $L\delta$, permite simplificar el estudio de las estrellas BA supergigantes. Esta solución analítica, al no depender de una solución numérica, que requiere de la hidrodinámica para calcularla, permite que su utilización sea más simple, al igual como lo hace el perfil β para soluciones rápidas. Los resultados obtenidos pueden aplicarse en áreas como las de transporte radiativo, donde los códigos que generan espectros sintéticos se pueden ver beneficiados, ya que hasta el momento no hay ninguno que utilice las soluciones $L\delta$ (todos utilizan el perfil β).

Con los modelos de la malla computacional también fue posible estudiar las relaciones momentum-luminosidad (WLR) y v_∞/v_{esc} . En el caso de la WLR, la cual presenta una discrepancia entre las observaciones y las predicciones de la teoría estándar para estrellas BA supergigantes con temperaturas menores de $22000 K$, se obtiene que para los modelos de la malla computacional entre $11000 K < T_{eff} < 20000 K$, el momentum del viento se corresponde con las observaciones de estrellas BA supergigantes. Lo mismo sucede con las observaciones de la relación v_∞/v_{esc} , la cual muestra un decrecimiento a medida que aumenta v_{esc} (o la temperatura). Estos resultados no hacen más que confirmar que las estrellas BA supergigantes se rigen por la solución $L\delta$, lo cual ya había sido predicho por Curé et al. (2011).

A futuro se pretende refinar la función analítica obtenida utilizando métodos estadísticos más rigurosos. Con lo cual se podrá encontrar un ajuste más preciso entre los parámetros g_0 , δ_1 , δ_2 y γ y los parámetros estelares y del viento. También se piensa derivar una función simplificada para el cálculo de la velocidad terminal, lo cual simplificaría aún más la solución, al no tener que calcularla de la función W , aunque posiblemente el error aumentaría. Además, se implementará la solución analítica en el código de transporte radiativo *Fastwind*. Si se encontrara un buen ajuste entre los espectros sintéticos y observados, se trataría de una prueba más para afirmar que las estrellas BA supergigantes se rigen por la solución $L\delta$. Por último, se estudiarán los casos con rotación estelar y se tratará de obtener una solución analítica para éstos.

Apéndice A

Aproximación de Sobolev

Si un fotón es emitido desde la fotosfera, éste puede ser absorbido por la transición de una línea en una delgada región de interacción. El ancho geométrico de esta región depende del gradiente de velocidad del viento y del ancho en la frecuencia del perfil de línea. Por ejemplo, un perfil de absorción delgado dará una delgada región de interacción. Una ley de velocidad abrupta con un gran gradiente dv/dr , también dará una delgada región de interacción. Luego, si la región de interacción es muy delgada es posible simplificar el problema de transferencia radiativa en vientos estelares.

Sobolev (1960) derivó las ecuaciones de transferencia radiativa permitiendo que la región de interacción fuera infinitamente delgada. Este límite es alcanzado cuando el ancho del perfil de absorción $\phi(\Delta\nu)$ de la línea, es tan pequeño que ϕ puede ser tratado como una función δ . Esto es llamado la *aproximación de Sobolev*. En el caso de la profundidad óptica, la cual normalmente contiene una integración de la densidad sobre la distancia, depende solamente de la condición local en el punto donde la absorción ocurre. Esto simplifica enormemente la solución de la ecuación de transferencia radiativa en atmósferas dinámicas. En la aproximación de Sobolev, la región de interacción donde los fotones con una frecuencia dada y llegando desde una dirección dada puede interactuar con los iones en el viento por la absorción de una línea, reduciéndola a un punto a lo largo del camino del fotón. Esto es llamado el *punto de Sobolev*

La localización del punto de Sobolev para fotones emitidos por la fotosfera a una frecuencia ν_p a lo largo de un rayo con dirección z que son absorbidos en una línea

de frecuencia ν_0 viene dado por la condiciones:

$$\nu_0 = \nu_p \left(1 - \frac{v_z(r_S)}{c} \right) \quad (\text{A.1})$$

o

$$v_z(r_S) = \frac{z}{r} v(r_S) = c \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu_p} \right), \quad (\text{A.2})$$

donde r_S es la distancia del punto de Sobolev desde el centro de la estrella, y $v_z(r_S)$ es la componente de velocidad del viento en r_S en la dirección z .

En la aproximación de Sobolev la interacción entre la radiación y los iones en el viento es reducida a un proceso local que puede ser descrito por las condiciones en el punto de Sobolev y no requiere conocimiento acerca de la profundidad óptica del viento sobre y bajo el punto de Sobolev.

La profundidad óptica de Sobolev

La profundidad óptica (adimensional) para un fotón de frecuencia ν_p a lo largo de una línea con dirección z es definida como:

$$\tau_{\nu_p}(z_1) = \int_{z_1}^{\infty} \kappa_{\nu_p}(z) \rho(z) dz, \quad (\text{A.3})$$

donde κ_{ν_p} es el coeficiente de absorción en $cm^2 g^{-1}$, dado por la ecuación 2.1.

Entonces,

$$\tau_{\nu_p}(z_1) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_l \int_{z_1}^{\infty} n_l \left(1 - \frac{n_u g_l}{n_l g_u} \right) \phi(\Delta\nu) dz. \quad (\text{A.4})$$

La densidad del ion para los niveles superiores e inferiores de la transición de la línea, n_l y n_u , variarán a lo largo del camino z . La frecuencia $\Delta\nu$ en el perfil de la línea depende de z a través de la relación Doppler, ecuación 2.10,

$$\Delta\nu(z) = \nu_p \left(1 - \frac{v_z}{c} \right) - \nu_0. \quad (\text{A.5})$$

En la aproximación de Sobolev $\phi(\Delta\nu)$ es una función delta y la ecuación A.4 puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\tau_{\nu_p}(z_1) &= \frac{\pi e^2}{m_e c} f_l \int_{\Delta\nu(z_1)}^{\Delta\nu(z=\infty)} n_l(z) \left(1 - \frac{n_u}{n_l} \frac{g_l}{g_u}\right) \frac{dz}{d(\Delta\nu)} \phi(\Delta\nu) d(\Delta\nu) \\
&= \frac{\pi e^2}{m_e c} f_l n_l(r_S) \left(-\frac{n_u}{n_l} \frac{g_l}{g_u}\right)_{r_S} \left(\frac{dz}{d\Delta\nu}\right)_{r_S} \\
&= (\kappa_l \rho)_{r_S} \left(\frac{dz}{d\Delta\nu}\right)_{r_S},
\end{aligned} \tag{A.6}$$

donde κ_l , ρ y $dz/d(\Delta\nu)$ son evaluados en el punto de Sobolev dados por la condición de la ecuación A.2. Esta expresión es llamada *profundidad óptica de Sobolev*.

Si derivamos una expresión para el término $(dz/d\Delta\nu)$ de la ecuación A.6, notamos que la relación entre z y $\Delta\nu$ esta dada por la ecuación 2.10, entonces:

$$\Delta\nu = \nu_p - \nu_0 - \left(\frac{\nu_p}{c}\right) \frac{z}{r} v(r). \tag{A.7}$$

Diferenciando $\Delta\nu$ con respecto a z , con $r = \sqrt{z^2 - p^2}$ y $\cos\theta \equiv \mu = z/r$, obtenemos:

$$\left(\frac{dz}{d\Delta\nu}\right)_{r_S} = \frac{c/\nu_p}{\left[(1 - \mu^2) \frac{v(r)}{r} + \mu^2 \frac{dv(r)}{dr}\right]_{r_S}}, \tag{A.8}$$

donde μ , r y $v(r)$ deben ser evaluados en r_S . Esto nos entrega una expresión final para la *profundidad óptica de Sobolev* en término de la frecuencia en reposo ν_0 de la absorción de la línea:

$$\begin{aligned}
\tau_{\nu_0}^S &= \frac{(\kappa_l \rho)_{r_S} (c/\nu_0)}{\left[(1 - \mu^2) \frac{v(r)}{r} + \mu^2 \frac{dv(r)}{dr}\right]_{r_S}} \\
&= \frac{(\kappa_l \rho)_{r_S} \lambda_0 (r/v)_{r_S}}{1 + \sigma \mu^2} \\
&= \frac{\pi e^2}{m_e c} f_l \lambda_0 n_l(r_S) \left(1 - \frac{n_u}{n_l} \frac{g_l}{g_u}\right)_{r_S} \frac{(r/v)_{r_S}}{1 + \sigma \mu^2},
\end{aligned} \tag{A.9}$$

donde σ es definido como:

$$\sigma \equiv \frac{r}{v} \frac{dv}{dr} - 1 \equiv \frac{d \ln v}{d \ln r} - 1. \tag{A.10}$$

Se ha cambiado ν_p a ν_0 , entonces $\nu_p \simeq \nu_0$ a menos que la velocidad del viento sea una substancial fracción de de la velocidad de la luz.

Región de interacción de la línea

En la aproximación de Sobolev el perfil de absorción una línea es considerado infinitamente delgado. En realidad $\phi(\Delta\nu)$ no es una función delta, ya que la velocidad Gaussiana v_G en el viento, debido a los movimientos térmicos y turbulentos, no es cero. Esto significa que la región de interacción para un fotón en realidad no es un punto, pero que la interacción puede ocurrir sobre una cierta distancia a lo largo del camino del fotón. El largo del camino depende de v_G y del gradiente de velocidad del viento.

Se define entonces la *longitud de Sobolev*, $\mathcal{L}_s(r, u)$, en el punto r del viento como la longitud sobre la cual la componente de velocidad del viento en la dirección l , que cruza el vector radial en un ángulo $\theta = \arccos \mu$, cambia una cantidad v_g . Es decir,

$$\mathcal{L}_s(r, u) = \frac{v_g}{d\mu v(r)/dl} = \frac{v_G}{(1 - \mu^2)v/r + \mu^2 dv/dr}. \quad (\text{A.11})$$

Podemos considerar \mathcal{L}_s como un vector originado en r en la dirección l , descrito por μ , con una longitud $|\mathcal{L}_s|$. En cualquier punto r del viento, el conjunto de vectores \mathcal{L}_s define una superficie tridimensional. El volumen dentro de esta superficie es llamado *región de interacción de la línea*, debido a que ésta es la región alrededor de un punto r dentro del cual un fotón emitido en r por una transición atómica, puede ser abosrbido por la misma transición. La superficie de la región de interacción es el lugar donde el gas está moviéndose lejos de r con una velocidad v_G .

Si se considera que la absorción en la línea puede ocurrir en un rango de frecuencias dentro de $1,5\Delta\nu_G$ de la frecuencia central ν_0 , la absorción de un fotón con frecuencia $\nu_p = \nu_0(1 + v_l(r)/c)$ puede ocurrir dentro de 1,5 longitudes de Sobolev.

Condición para validar la aproximación de Sobolev

La aproximación de Sobolev es su *forma pura*, fue descrita en las secciones anteriores, suponiendo que el perfil de una línea es infinitamente delgado, entonces $\phi(\Delta\nu)$ puede ser tratado como una función delta, y la profundidad óptica τ es una función

escalón. En el caso de la profundidad óptica τ_S , la ecuación A.7 depende solamente de las condiciones en el punto de Sobolev. Entendiendo los conceptos de longitud de Sobolev y región de Sobolev, se puede relajar la condición para el ancho del perfil de la función en la aproximación de Sobolev.

En la derivación de la profundidad óptica de Sobolev se usa una función delta para escribir τ_S en la manera como lo expresa la ecuación A.9. Sin embargo, se podría obtener el mismo resultado si se supone que sólo n_i , n_ν y $dz/d\Delta\nu$ son constantes a lo largo de la longitud de integración donde $\phi(\Delta\nu) \neq 0$. Se ha mostrado que este es el caso para tres longitudes de Sobolev, desde el punto de Sobolev, para cierta frecuencia y dirección. Por lo tanto, la condición para la aproximación de Sobolev es válida si el cambio en las densidades de las partículas y en el gradiente de velocidades del viento sobre una longitud de $3\mathcal{L}_s$ es despreciable.

Apéndice B

Función W de Lambert

La función W de Lambert (Corless et al. 1996) es definida como la función implícita que satisface,

$$W(z)e^{W(z)} = z \tag{B.1}$$

Como la ecuación $y(x)e^{y(x)} = x$ tiene un infinito número de soluciones $y(x)$ para cada valor de x distinto de cero, W tiene un infinito número de ramas. En este trabajo, sólo se está interesado en la relevancia física del caso donde x es real y $-1/e \leq x < 0$, donde hay dos posibles valores reales de $W(x)$ (ver figura B.1). Como uno ya puede ver de la definición de la ecuación de W , la función W tiende a $-\infty$ en $x = 0$, es negativa para $x < 0$, positiva para valores positivos de x y debe valer -1 en el punto $x = -1/e$. La rama que satisface $-1 \leq W(x)$ para un x en el rango de $-1/e$ a ∞ es denotada como $W_0(x)$ y la rama que satisface $W(x) \leq -1$ sobre el intervalo de $-1/e$ a 0 se denota como $W_{-1}(x)$. Las ramas $W_0(x)$ y $W_{-1}(x)$ comparten un punto de bifurcación en $x = -1/e$.

La rama $W_0(x)$ es aludida como la *rama principal* de la función W, ya que es la única que es analítica en 0 . Las otras ramas no principales de la función W tienen un punto de bifurcación en 0 y son denotadas como $W_k(x)$, donde k es un entero distinto de cero.

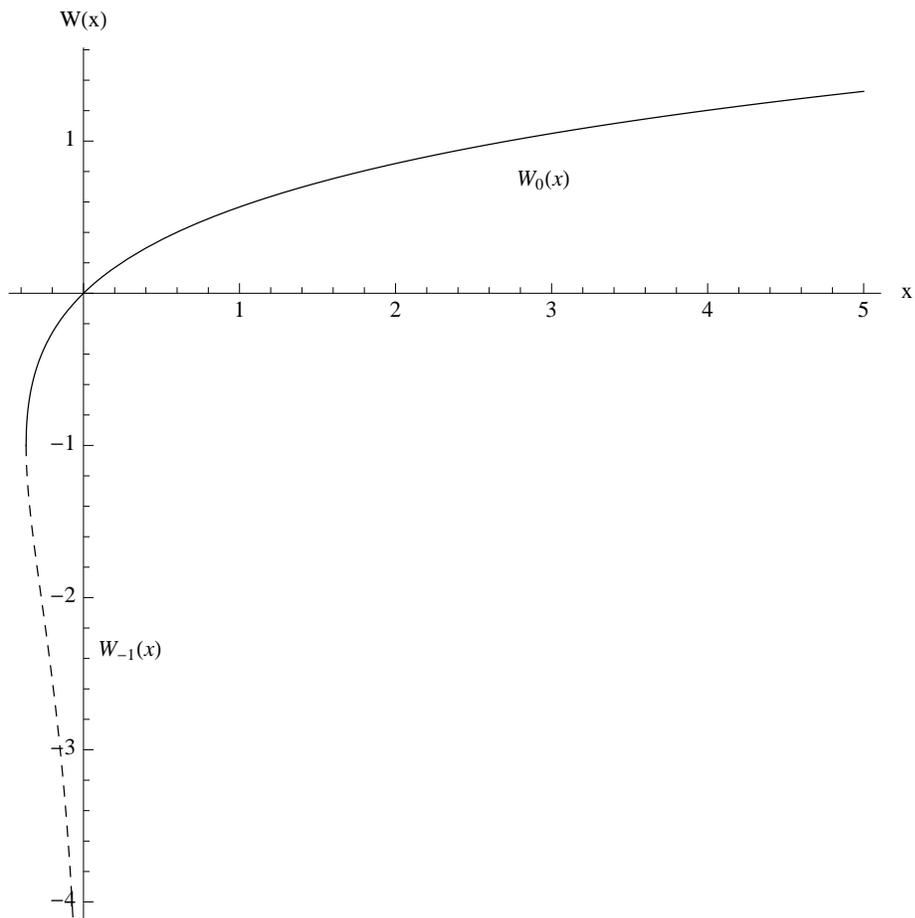


Figura B.1: Ramas reales de la función W de Lambert: $W_0(x)$ (línea sólida) y $W_{-1}(x)$ (línea a trazos).

Apéndice C

Distribución entre parámetros

A continuación se mostrarán algunas de las gráficas de la distribución entre los parámetros del ajuste y los parámetros estelares y del viento.

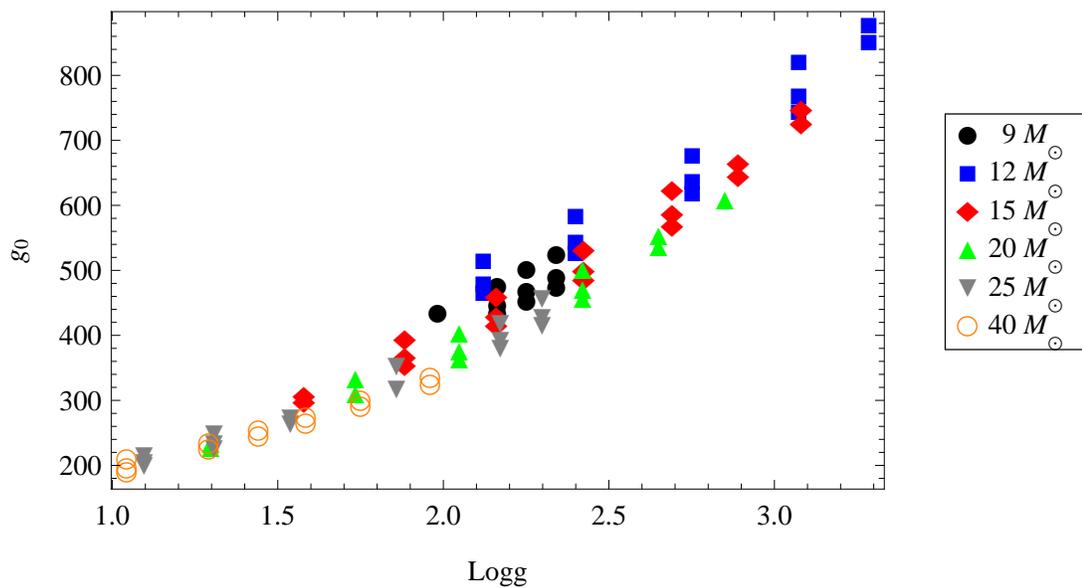


Figura C.1: Distribución entre g_0 y $\log g$ para diferentes masas estelares.

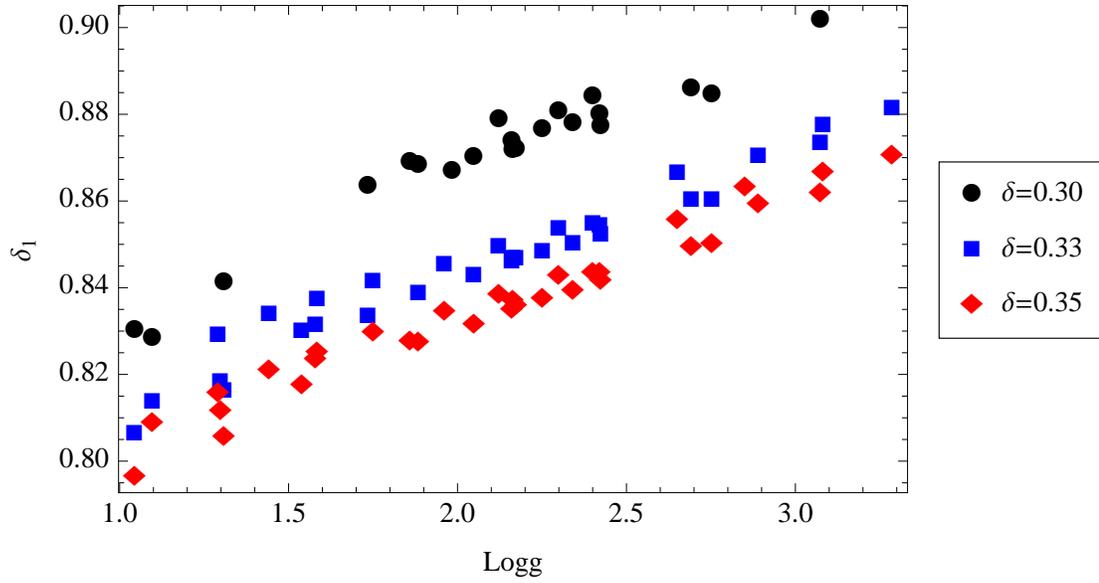


Figura C.2: Distribución entre δ_1 y $\log g$ para diferentes valores de δ .

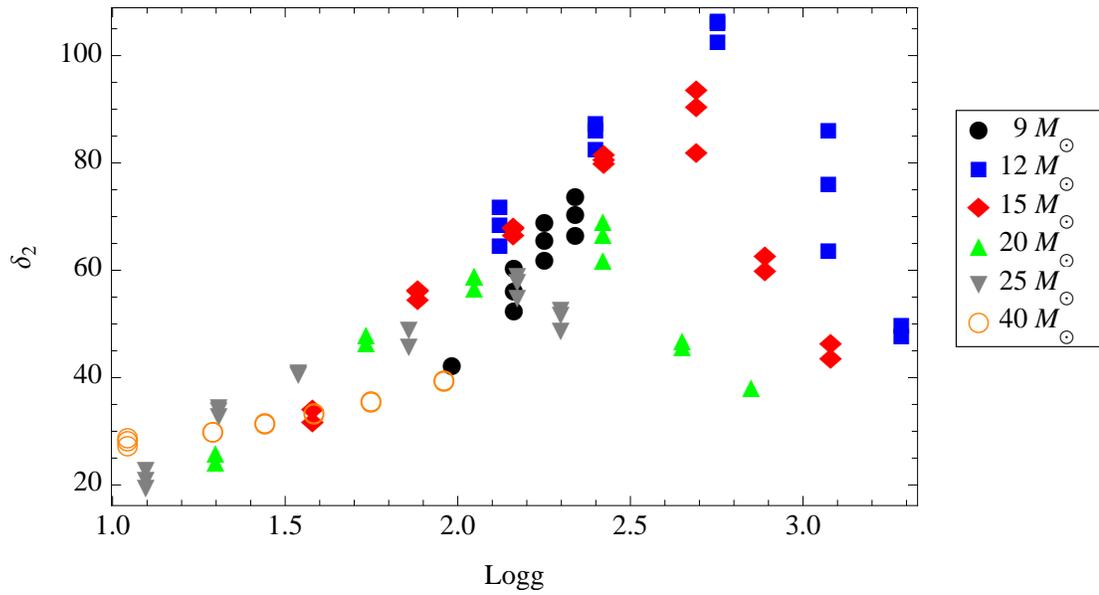


Figura C.3: Distribución entre δ_2 y $\log g$ para diferentes masas estelares.

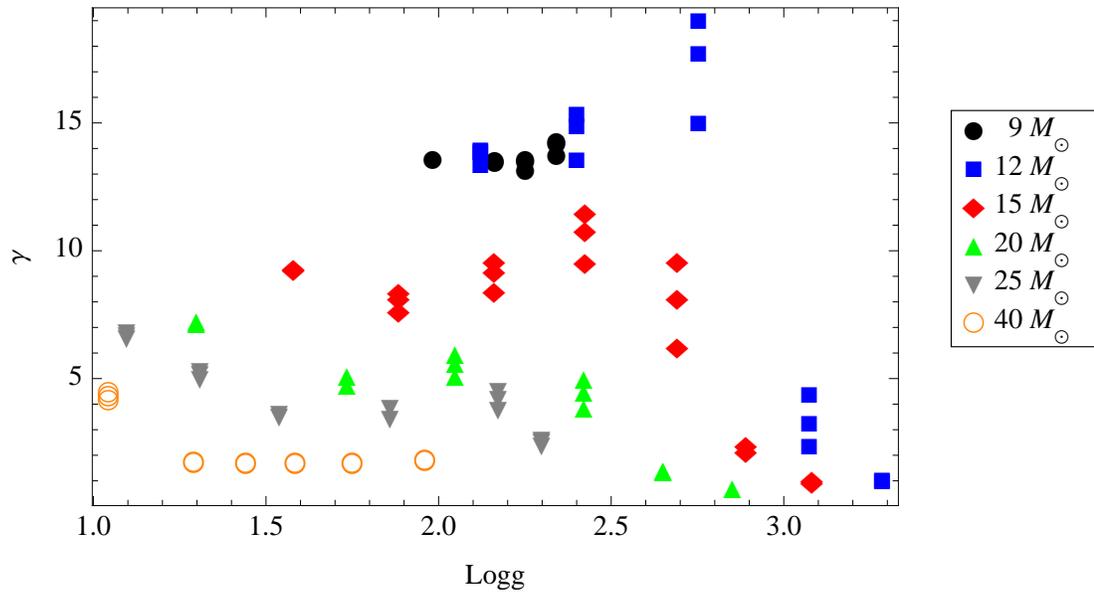


Figura C.4: Distribución entre γ y $\log g$ para diferentes masas estelares.

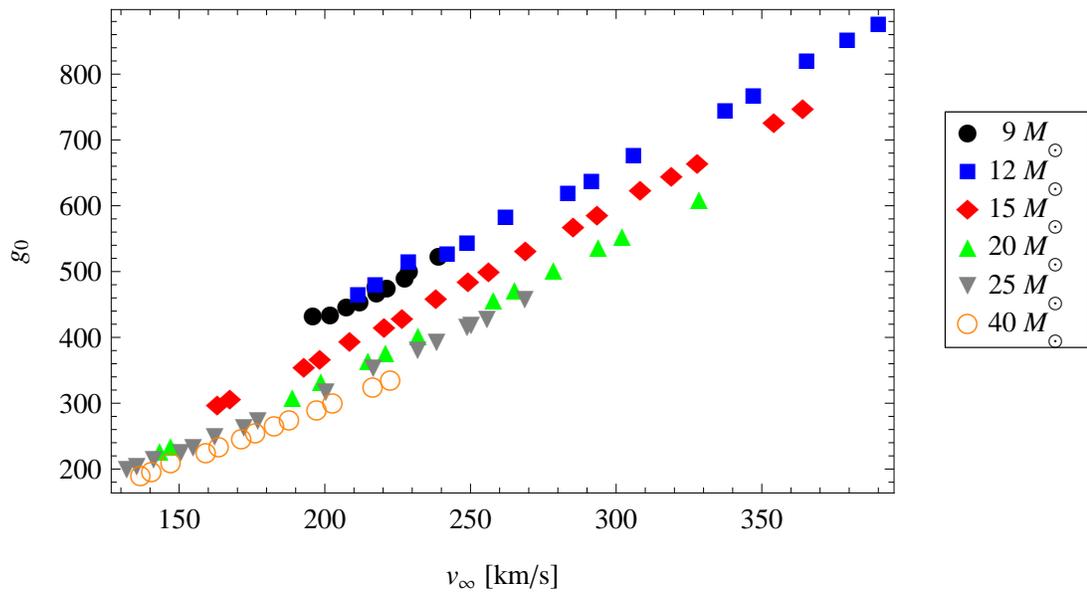


Figura C.5: Distribución entre g_0 y v_{∞} para diferentes masas estelares.

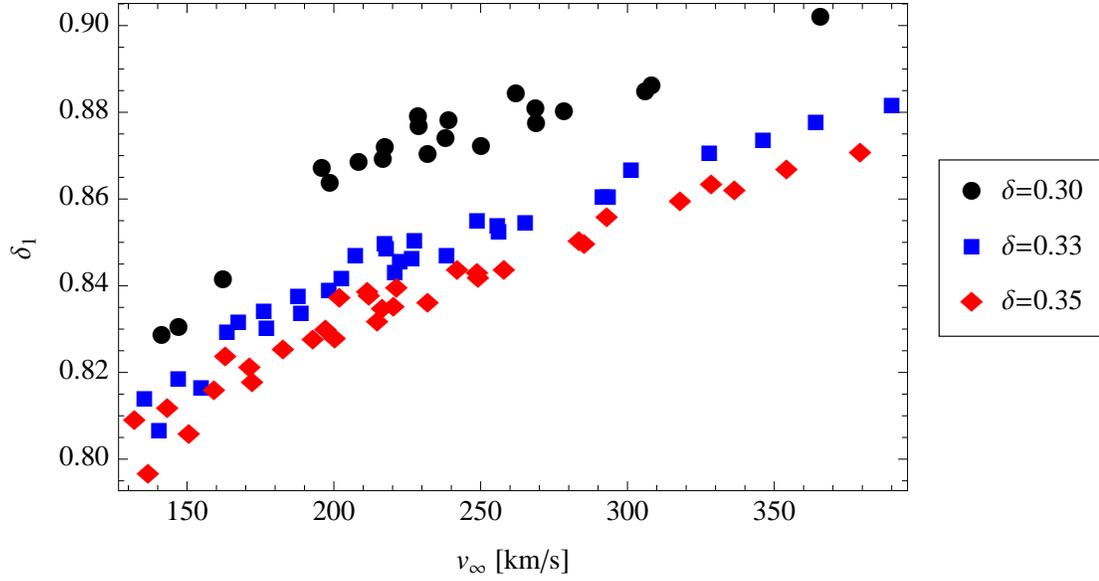


Figura C.6: Distribución entre δ_1 y v_∞ para diferentes valores de δ .

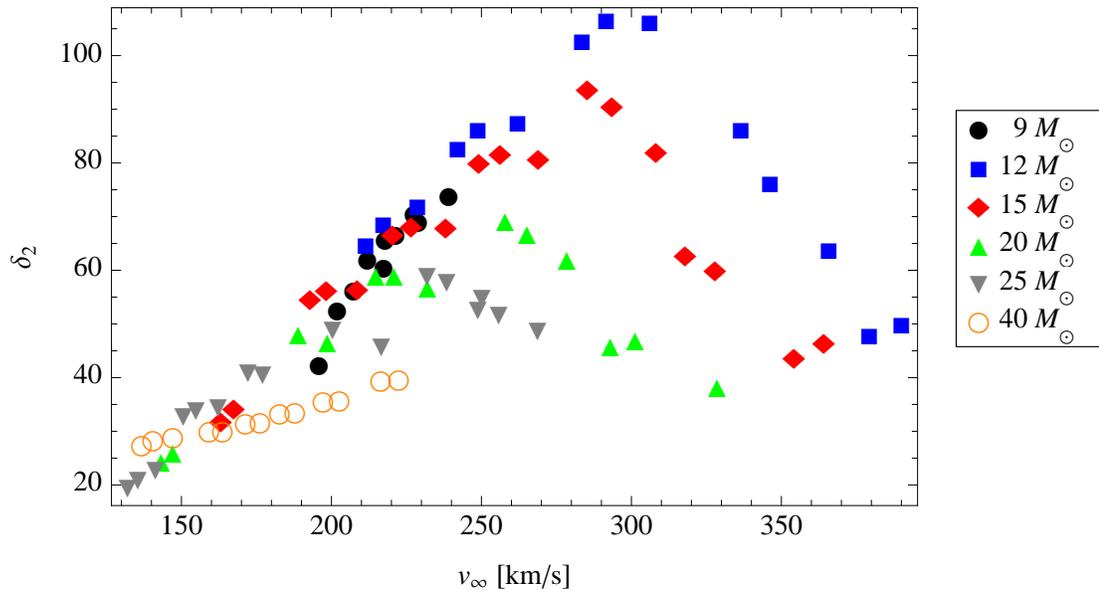


Figura C.7: Distribución entre δ_2 y v_∞ para diferentes masas estelares.

Apéndice D

Funciones f_1 , f_2 y f_3

Las funciones f_1 , f_2 y f_3 (Curé 2004) están definidas como:

$$f_1(u, Z) = FC(u, Z), \quad (\text{D.1})$$

$$f_2(u, Z) = \alpha f_1(u, Z) - uZ e(u, Z) \quad (\text{D.2})$$

y

$$f_3(u, Z) = (3u + Z)Z e(u, Z) + f_1(u, Z) [h(u)Z + \alpha - \delta], \quad (\text{D.3})$$

donde

$$FC(u, Z) = \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{1}{u^2} \frac{1}{[1+(1/u)Z]} \left[1 - (1 - u^2 - uZ)^{(1+\alpha)} \right], \quad (\text{D.4})$$

$$e(u, Z) = \frac{[1 - u(u + Z)]^\alpha - FC(u, Z)}{u(u + Z)} \quad (\text{D.5})$$

y

$$h(u) = \delta \left[\frac{2}{u} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}(1-\sqrt{1-u^2})} \right]. \quad (\text{D.6})$$

Bibliografía

Abbott, D. C. 1982, ApJ, 259, 282

Beals, C. S. 1929, MNRAS, 90, 202

Castor, J. I., Abbott, D. C., & Klein, R. I. 1975, ApJ, 195, 157

Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., & Knuth, D. E. 1996, Adv. Comput. Math., 5, 329

Crowther, P. A., Lennon, D. J., & Walborn, N. R. 2006, A&A, 446, 279

Curé, M. 2004, ApJ, 614, 929

Curé, M., Cidale, L., & Granada, A. 2011, ApJ, 737, 18

Curé, M. & Rial, D. F. 2007, Astronomische Nachrichten, 328, 513

Curé, M., Rial, D. F., & Cidale, L. 2005, A&A, 437, 929

Ekström, S., Georgy, C., Eggenberger, P., et al. 2012, A&A, 537, A146

Firnstein, M. & Przybilla, N. 2012, A&A, 543, A80

Friend, D. B. & Abbott, D. C. 1986, ApJ, 311, 701

Kudritzki, R.-P., Lennon, D. J., & Puls, J. 1995, in Science with the VLT, ed. J. R. Walsh & I. J. Danziger, 246

Kudritzki, R. P., Pauldrach, A., & Puls, J. 1987, A&A, 173, 293

Kudritzki, R. P., Pauldrach, A., Puls, J., & Abbott, D. C. 1989, A&A, 219, 205

Kudritzki, R.-P. & Puls, J. 2000, ARA&A, 38, 613

- Kudritzki, R. P., Puls, J., Lennon, D. J., et al. 1999, *A&A*, 350, 970
- Lamers, H. J. G. & Pauldrach, A. W. A. 1991, *A&A*, 244, L5
- Lamers, H. J. G. L. M. & Cassinelli, J. P. 1999, *Introduction to Stellar Winds*, by Henny J. G. L. M. Lamers and Joseph P. Cassinelli, pp. 452. ISBN 0521593980. Cambridge, UK: Cambridge University Press, June 1999.
- Lucy, L. B. & Solomon, P. M. 1970, *ApJ*, 159, 879
- Markova, N. & Puls, J. 2008, *A&A*, 478, 823
- Martins, F., Schaerer, D., & Hillier, D. J. 2005, *A&A*, 436, 1049
- Milne, E. A. 1924, *MNRAS*, 85, 111
- Morton, D. C. 1967, *ApJ*, 147, 1017
- Müller, P. E. & Vink, J. S. 2008, *A&A*, 492, 493
- Murdin, P. 2001, *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*
- Neugebauer, M. & Snyder, C. W. 1962, *Science*, 138, 1095
- Parker, E. N. 1958, *ApJ*, 128, 677
- Pauldrach, A., Puls, J., & Kudritzki, R. P. 1986, *A&A*, 164, 86
- Puls, J., Kudritzki, R.-P., Herrero, A., et al. 1996, *A&A*, 305, 171
- Puls, J., Springmann, U., & Lennon, M. 2000, *A&AS*, 141, 23
- Shimada, M. R., Ito, M., Hirata, B., & Horaguchi, T. 1994, in *IAU Symposium, Vol. 162, Pulsation; Rotation; and Mass Loss in Early-Type Stars*, ed. L. A. Balona, H. F. Henrichs, & J. M. Le Contel, 487
- Sobolev, V. V. 1960, *Moving envelopes of stars*
- Ud-Doula, A. 2003, PhD thesis, University of Delaware
- Verdugo, E., Talavera, A., & Gómez de Castro, A. I. 1998, *Ap&SS*, 263, 263
- Villata, M. 1992, *A&A*, 257, 677
- Vink, J. S., de Koter, A., & Lamers, H. J. G. L. M. 2000, *A&A*, 362, 295

